Rechenregeln für Grenzwerte

Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) mit Grenzwerten a und b gilt:

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$

Beweis

(i) Summe und Differenz:
Dreiecksungleichung $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &= |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0 \end{aligned}$$

(ii) Produkt:
Dreiecksungleichung, Beschränktheit von a_n $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0 \end{aligned}$$

(iii) Quotient:

$n > n_0 \quad \Longrightarrow$

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2} \right) \ni b_n$$

$|b_n| \geq |b|/2 \quad \Longrightarrow$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b b_n} \right| \leq \frac{1}{|b|(|b|/2)} \, |b_n - b| \to 0 \, ,$$

d.h. $1/b_n \to 1/b$

Regel für Produkte $\quad \Longrightarrow \quad$ Konvergenz von a_n/b_n

Beispiel

Grenzwert einer rationalen Folge:

$$a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$$

mit Polynomen p und q

Bestimmung des Grenzwerts nach Kürzen durch die höchste Potenz, z.B.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1/n \, - \, 2}{3 \, + \, \lim_{n\to\infty} 4/n} = -\frac{2}{3}$$

Grenzwert bei Zählergrad j und Nennergrad k:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k \end{cases}$$

Divergenz für $j > k$

Beispiel

Berechnung des Grenzwerts der Folge $\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$, $n = 1, 2, \ldots$

(i) Falsche Argumentation:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\right)^n = 1^n = 1$$

keine konstante Anzahl der Faktoren!

(ii) Korrekte Berechnung:
benutze

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1} \\ &= \mathrm{e}\cdot 1^{-1} = \mathrm{e}\end{aligned}$$