Rationale Funktion

Eine rationale Funktion r mit Zählergrad m und Nennergrad n ist der Quotient zweier Polynome:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}, \quad a_m, b_n \neq 0\,.$$

Diese Darstellung bezeichnet man als irreduzibel, wenn p und q keinen gemeinsamen Linearfaktor besitzen. Die Nullstellen des Nenners sind dann nicht hebbare Definitionslücken der rationalen Funktion r und werden als Polstellen bezeichnet. Ihre Ordnung entspricht der Vielfachheit der Nullstelle.

Die Variable x und die Koeffizienten a_k, b_k können reell oder komplex sein. Entsprechend spricht man von einer reellen oder komplexen rationalen Funktion.

Beispiel

Funktionsgraph und Polstellen der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-3)^2}$$

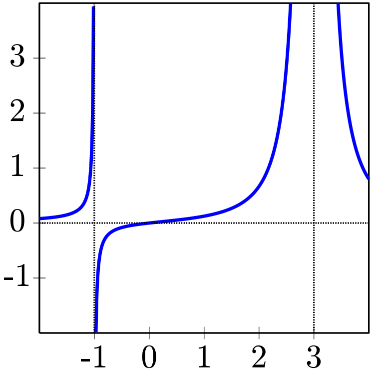
einfacher Pol bei $x = -1$
$\rightsquigarrow$ Vorzeichenwechsel

doppelter Pol bei $x = 3$
$\rightsquigarrow$ kein Vorzeichenwechsel

Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R} \backslash \{-1, 3\}$$

Wertebereich $W = \mathbb{R}$

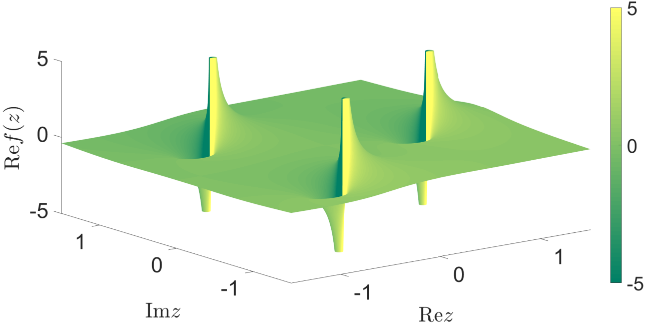


Beispiel

Visualisierung der rationalen Funktion

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}, \quad z = x + \mathrm{i}y$$

über der komplexen Ebene



einfache Polstellen an den komplexen Einheitswurzeln:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \quad z_3 = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$