Quotientenregel

Die Ableitung des Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen f und g ist

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

an allen Punkten x mit $g(x) \neq 0$. Insbesondere gilt

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

Höhere Ableitungen eines Quotienten $r = f/g$ kann man alternativ zur direkten Berechnung ebenfalls rekursiv, ausgehend von der Identität

$$f^{(n)} = (rg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r^{(n-k)} g^{(k)}\,,$$

bestimmen. Sind $r', r'', \ldots, r^{(n-1)}$ bereits berechnet, so kann diese Gleichung nach $r^{(n)}$ aufgelöst werden.

Beispiel

Ableitungen der rationalen Funktion

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

(i) Erste Ableitung:
Quotientenregel $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2 \quad \leadsto$

$$\begin{aligned} r'(x) &= \frac{(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)(1-2x)(4+3x^2) - (1-2x)(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)(4+3x^2)}{(4+3x^2)^2} \\ &= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2} \end{aligned}$$

alternativ: Produktregel und die Formel $(1/g)' = -g'/g^2 \quad \Longrightarrow$

$$r'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right) = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2}$$

(ii) Zweite Ableitung (rekursive Methode):
Produktregel, angewandt auf $f = rg \quad \rightsquigarrow$

$$f'' = r''g + 2r'g' + rg'' \quad \Longleftrightarrow \quad r'' = \left(f'' - 2r'g' - rg''\right)/g$$

Einsetzen von f, g, r und der bereits berechneten ersten Ableitung $r' \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} r''(x) &= \left(0 - 2\frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}(6x) - \frac{1-2x}{4+3x^2}(6)\right)/(4+3x^2) \\ &= \frac{-36x^3 + 56x^2 + 144x - 24}{(4+3x^2)^3} \end{aligned}$$