Quotientenkriterium

Ist $a_n \neq 0$ für $n > n_0$ und existiert $q \in (0, 1)$ mit

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q\,, \quad n > n_0\,,$$

so ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Gilt hingegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1\,, \quad n > n_0\,,$$

so ist $\sum a_n$ divergent.

Das hinreichende Kriterium für Konvergenz lässt sich auch in der äquivalenten Form

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

schreiben.

Man beachte, dass die hinreichende Konvergenz-Bedingung restriktiver als die Ungleichung

$$\left|a_{n+1}\right| < \left|a_n\right|, \quad n > n_0 ,$$

ist, aufgrund derer keine Aussage möglich ist.

Beweis

(i) Konvergenz:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1 \quad \text{für } n > n_0$$

$\implies$

$$|a_{n_0+k}| \leq q|a_{n_0+k-1}| \leq \ldots \leq q^{k-1}|a_{n_0+1}| = c(q, n_0)q^{n_0+k}$$

geometrische Reihe als Majorante

(ii) Divergenz:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \quad \text{für } n > n_0$$

$\implies$

$$0 < |a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0+2}| \leq \ldots$$

keine Nullfolge der Summanden

Beispiel

Anwendung des Quotientenkriteriums bei Reihen mit Summanden aus Fakultäten und Potenzen anhand der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n / \binom{2n}{n}$$

Quotienten der Summanden

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n\, n!\, n!} = \frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

Grenzwert $q = 3/4 < 1$ für $n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad$ Konvergenz
Die direkte Abschätzung der Summanden

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdots 3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k}{n+k}$$

ist schwieriger (Faktoren sowohl kleiner als auch größer als 1).