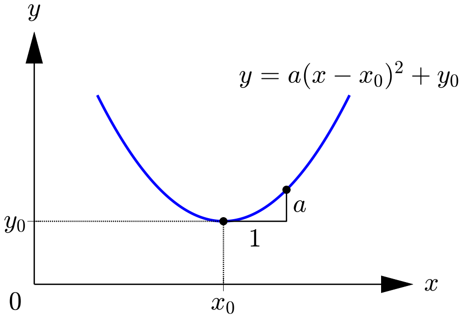
Quadratische Funktion

Der Graph einer quadratischen Funktion

$$\begin{aligned} x \mapsto y = f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x - x_0)^2 + y_0 \end{aligned}$$

ist eine Parabel mit Scheitel $(x_0, y_0) = (-b/(2a), -b^2/(4a) + c)$.



Beweis

Umformung von

$$y = ax^2 + bx + c$$

durch quadratische Ergänzung $\quad \rightsquigarrow$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c\,,$$

d.h.

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

mit

$$x_0 = b/(2a), \quad y_0 = -b^2/(4a) + c$$

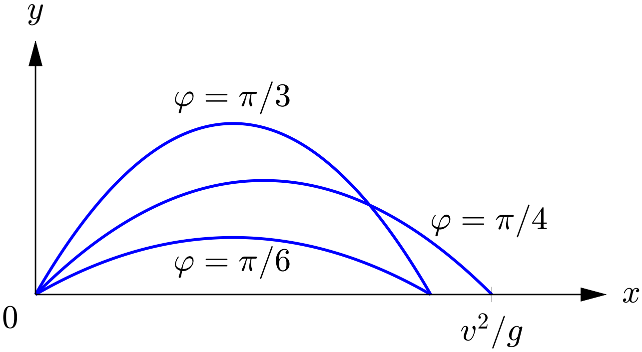
Beispiel

Schräger Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit v und Wurfrichtung $(\cos\varphi, \sin\varphi)$

parabelförmige Flugbahn:

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

mit g der Erdbeschleunigung



Herleitung durch Überlagerung der gleichförmigen Bewegung mit Geschwindigkeit v und der beschleunigten Bewegung des freien Falls:

$$\begin{aligned} x(t) &= vt\ \cos\varphi \\ y(t) &= vt\ \sin\varphi - \frac{1}{2}\,gt^2 \end{aligned}$$

Auflösen von $x(t)$ nach t,

$$t = \frac{x(t)}{v\cos\varphi}\,,$$

und Substitution in y-Komponente $\quad\rightsquigarrow$

$$y(x) = \frac{vx\ \sin\varphi}{v\ \cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\ \cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\ \cos^2\varphi}\right)$$

Wurfweite: $y(x) = 0 \quad\rightsquigarrow\quad (\ldots) = 0$ und nach Auflösen nach x

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\,(2\cos\varphi\sin\varphi) = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi)$$

maximal für $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45^\circ$