Produktregel

Die Ableitung des Produktes zweier differenzierbarer Funktionen f und g ist

$$(fg)' = f'g + fg' \, .$$

Allgemeiner gilt für ein Produkt $f = f_1 \cdots f_n$

$$f' = \sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_{k-1} f_k' f_{k+1} \cdots f_n = \sum_{k=1}^{n} f_k' \frac{f}{f_k}$$

und für die n-te Ableitung

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \, .$$

Beweis

Definition der Ableitung

$$(fg)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Umformung $\quad \rightsquigarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Linearität des Grenzwertes $\quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

wiederholte Anwendung der Produktregel $\quad \rightsquigarrow \quad$ Formeln für $(\prod_{k=1}^{n} f_k)'$ und $(fg)^{(n)}$

Beispiel

Ableitung des Polynoms $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$:

Produktregel $\quad\rightsquigarrow$

$$p'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$$

An den Nullstellen $x = 1, 2, 3$ ist jeweils nur ein Faktor relevant:

$$\begin{aligned} p'(1) &= (1-2)(1-3) = 2 \\ p'(2) &= (2-1)(2-3) = -1 \\ p'(3) &= (3-1)(3-2) = 2 \end{aligned}$$

analog: Ableitung von $p(x) = (x-1)\cdots(x-n)$ an den Nullstellen $k = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} p'(k) &= (k-1)\cdots(k-(k-1))\cdot(k-(k+1))\cdots(k-n) \\ &= (k-1)!\,(-1)^{n-k}\,(n-k)! \end{aligned}$$