Polynomdivision

Zu Polynomen p und q mit $m = \operatorname{Grad} q \leq \operatorname{Grad} p = n$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome f und r mit

$$p = fq + r, \quad \operatorname{Grad} f = n - m, \operatorname{Grad} r < m\,.$$

Diese Zerlegung kann durch Division mit Rest bestimmt werden, analog zur schriftlichen Division natürlicher Zahlen.

Ist q ein Linearfaktor, d.h. $q(x) = x - t$, so ist $\operatorname{Grad} f = n - 1$ und $r(x) = r_0 = p(t)$, insbesondere $r(x) = 0$ für eine Nullstelle t von p.

Die Koeffizienten f_k von $f(x) = f_{n-1}x^{n-1} + \cdots + f_0$ können in diesem Spezialfall mit dem Horner-Schema aus den Koeffizienten p_k von $p(x) = p_n x^n + \cdots + p_0$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} f_{n-1} &= p_n \\ f_{k-1} &= tf_k + p_k, \quad k = n-1, \ldots, 1 \\ r_0 &= tf_0 + p_0 \end{aligned}$$

Diese Rekursion läßt sich mit Hilfe des Tableaus

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & p_n & p_{n-1} & \cdots & p_1 & p_0 \\
\hline
\nearrow *t & & tf_{n-1} & \cdots & tf_1 & tf_0 \\
+ & f_{n-1} & f_{n-2} & \cdots & f_0 & r_0
\end{array}
$$

durchführen. Man addiert die sukzessive berechneten Produkte der zweiten Zeile zu den Koeffizienten von p in der ersten Zeile. Da $r_0 = p(t)$, ermöglicht das Horner-Schema die Auswertung eines Polynoms vom Grad n in $2n$ Operationen.

Beweis

(i) Division von p durch q:

$$\underbrace{p_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{p_n}{q_m} x^{n-m} \underbrace{(q_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + \tilde{p}(x)$$

mit Rest $\tilde{p}(x) = \tilde{p}_{n-1} x^{n-1} + \cdots$
erneute Division, falls $m \leq n-1$:

$$\tilde{p}(x) = \frac{\tilde{p}_{n-1}}{q_m} x^{n-1-m} q(x) + \tilde{\tilde{p}}(x)$$

überspringe den Schritt, falls $\tilde{p}_{n-1} = 0$, d.h. setze $\tilde{\tilde{p}} = \tilde{p}$
Abbruch, wenn der Grad des Restpolynoms kleiner als m ist, d.h. spätestens nach $n-m+1$ Schritten
sukzessives Einsetzen der Produkte $\quad \rightsquigarrow$

$$f(x) = \frac{p_n}{q_m} x^{n-m} + \frac{\tilde{p}_{n-1}}{q_m} x^{n-1-m} + \cdots$$

(ii) Division durch einen Linearfaktor:

$q(x) = x - t \quad \Longrightarrow$

$$p(x) = (f_{n-1}x^{n-1} + \cdots + f_0)(x - t) + r_0$$

$x = t \quad \Longrightarrow \quad p(t) = f(t) \cdot 0 + r_0$, d.h. $r_0 = p(t)$

(iii) Horner-Schema:

$q(x) = x - t \quad \Longrightarrow$

$$p_n x^n + \cdots + p_0 = (f_{n-1}x^{n-1} + \cdots + f_0)(x - t) + r_0$$

Koeffizientenvergleich $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} x^n : &\quad p_n = f_{n-1} \\ x^{n-1} : &\quad p_{n-1} = f_{n-2} - tf_{n-1} \\ &\quad \ldots \\ x^1 : &\quad p_1 = f_0 - tf_1 \\ x^0 : &\quad p_0 = r_0 - tf_0 \end{aligned}$$

Auflösen nach $f_{n-2}, \ldots, f_0, r_0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Rekursion des Horner-Schemas

Beispiel

Division der Polynome

$$\begin{aligned} p(x) &= 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \\ q(x) &= 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

verfahre analog zur schriftlichen Division

$$\begin{array}{l} (9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) = 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)} \\ \underline{-(9x^5 + 6x^4 + 3x^3)} \\ \qquad 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\ \qquad \underline{-(6x^4 + 4x^3 + 2x^2)} \\ \qquad\qquad 3x^3 + 2x^2 + 4x \\ \qquad\qquad \underline{-(3x^3 + 2x^2 + x)} \\ \qquad\qquad\qquad 3x + 2 = r(x) \end{array}$$

- Schritt 1:
  Division der Terme höchsten Grades von p und q $\quad \rightsquigarrow$
  $9x^5/3x^2 = 3x^3$
  Subtraktion des Produktes $3x^3q(x) = 9x^5 + 6x^4 + 3x^3$ von p $\quad \rightsquigarrow$
  Rest $\tilde{p}(x) = 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 + \cdots$
- Schritt 2:
  Division der Terme höchsten Grades von $\tilde{p}$ und q $\quad \rightsquigarrow$
  $6x^4/3x^2 = 2x^2$
  Subtraktion des Produktes $2x^2q(x) = 6x^4 + 4x^3 + 2x^2$ von $\tilde{p}$ $\quad \rightsquigarrow$
  Rest $\tilde{\tilde{p}}(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + \cdots$
- ...

Abbruch, wenn der Grad des Restes kleiner als $\operatorname{Grad} q = 3$ ist; in diesem Beispiel Abbruch mit dem Rest

$$r(x) = 3x + 2$$

$\rightsquigarrow$ Zerlegung:

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} =$$

$$\underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)}$$

Beispiel

Horner-Schema für

$$p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$$

und verschiedene Linearfaktoren $q(x) = x - t$

Polynomdivision $\quad \rightsquigarrow$

$$p(x) = (f_2 x^2 + f_1 x + f_0)(x - t) + r_0$$

mit $r_0 = p(t)$
Berechnung von f_k und r_0 mit dem Tableau

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ \hline \nearrow *t & & tf_2 & tf_1 & tf_0 \\ + & f_2 = 3 & f_1 & f_0 & r_0 \end{array}$$

des Horner-Schemas, bei dem in der ersten Zeile die Koeffizienten von p und in der dritten Zeile der Startwert $f_2 = 3$ bereits eingetragen sind

(i) $t = 3$:

Einsetzen von $t = 3$ $\rightsquigarrow$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ \hline *3 & & 9 & 21 & 42 \\ + & 3 & 7 & 14 & 40 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Zerlegung

$$3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 = (3x^2 + 7x + 14)(x - 3) + 40$$

und $p(3) = 40$

(ii) $t = 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ \hline *2 & & 6 & 8 & 2 \\ + & 3 & 4 & 1 & r_0 = 0 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ Faktorisierung

$$3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 = (3x^2 + 4x + 1)(x - 2)$$

kein Rest, da $t = 2$ eine Nullstelle von p ist