Partialbruchzerlegung

Eine rationale Funktion r mit n verschiedenen Polstellen z_j der Ordnung m_j,

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = c(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

lässt sich eindeutig in der Form

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \cdots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

zerlegen. Dabei ist $f(z) = f_0 + f_1 z + \cdots + f_d z^d$ ein Polynom vom Grad $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ ($f = 0$, falls $d < 0$). Die rationalen Funktionen r_j werden als Hauptteile von r an den Polstellen bezeichnet. Sie beschreiben jeweils das Wachstum von $r(z)$ für $z \to z_j$.

Die Partialbruchzerlegung kann auf verschiedene Weise bestimmt werden.
(i) Koeffizientenvergleich:
Nach Multiplikation mit dem Nennerpolynom q führt ein Vergleich der Koeffizienten der Monome z^k in der Identität

$$p(z) = f(z)q(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z)q(z)$$

auf ein quadratisches lineares Gleichungssystem für f_i und $a_{j,i}$.

(ii) Grenzwertmethode:
Für einfache Polstellen z_j ($m_j = 1$) ist

$$a_{j,1} = \lim_{z \to z_j} (z - z_j) r(z) = \frac{p(z_j)}{c \prod_{k \neq j} (z_j - z_k)} .$$

Falls $f \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ $\operatorname{Grad} p \geq \operatorname{Grad} q$), erhält man das Polynom f durch Subtraktion der bereits bestimmten Hauptteile von der rationalen Funktion r.

Bei Polstellen z_j höherer Ordnung ($m_j > 1$) lässt sich nur der führende Term mit der Grenzwertmethode berechnen:

$$a_{j,m_j} = \lim_{z \to z_j} (z - z_j)^{m_j} r(z) = \frac{p(z_j)}{c \prod_{k \neq j} (z_j - z_k)^{m_k}} .$$

Man kann jedoch die Methode rekursiv anwenden, indem man die jeweils berechneten Terme abzieht.

(iii) Polynomdivision:
Im Fall $\operatorname{Grad} p \geq \operatorname{Grad} q$ kann das Polynom f durch Polynomdivision bestimmt werden:

$$p = fq + g$$

mit $\operatorname{Grad} g < \operatorname{Grad} q$. Zur Bestimmung der Partialbruchzerlegung von

$$g/q = r - f$$

ist sowohl ein Koeffizientenvergleich als auch die Grenzwertmethode anwendbar.

(iv) Interpolation:
Gleichungen für die zu bestimmenden Koeffizienten f_i und $a_{j,i}$ können ebenfalls durch Einsetzen von Testwerten z_ℓ gewonnen werden. Diese Methode wird oft mit der Grenzwertmethode bei Polstellen höherer Ordnung kombiniert.

Beweis

a) Zerlegung für den Spezialfall einfacher Polstellen ($m_j = 1$):
Polynomdivision ($r = p/q = f$ Rest g) $\rightsquigarrow$

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{c(z - z_1)\cdots(z - z_n)}$$

Polynome g und q teilerfremd, z_j verschieden, Grad $g < n$
Lagrange-Form des Polynoms g

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n} g(z_j) \prod_{k \neq j} \frac{z - z_k}{z_j - z_k}, \quad g(z_j) = p(z_j) - f(z_j)q(z_j) = p(z_j)$$

Division durch $q(z) = c(z - z_1)\cdots(z - z_n)$ $\rightsquigarrow$

$$r(z) - f(z) = \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{p(z_j)}{c \prod_{k \neq j}(z_j - z_k)} \right] \frac{1}{z - z_j},$$

d.h. $a_j = [\ldots] = \lim_{z \to z_j}(z - z_j)r(z)$

b) Zerlegung im allgemeinen Fall:
Polynomdivision $\quad\rightsquigarrow$

$$r = p/q = f + g/q, \quad \operatorname{Grad} g < \operatorname{Grad} q$$

sukzessive Bestimmung der Hauptteile für die Polstellen z_j, beginnend mit z_1
$g(z)/q(z) = g(z)/(\tilde{q}(z)(z-z_1)^{m_1}) \quad \Longrightarrow \quad a_{1,m_1} = g(z_1)/\tilde{q}(z_1)$
Subtraktion des entsprechenden Terms höchster Ordnung des ersten Hauptteils $\quad\rightsquigarrow$

$$\tilde{r}(z) = \frac{g(z)}{q(z)} - \frac{a_{1,m_1}}{(z-z_1)^{m_1}} = \frac{g(z) - (g(z_1)/\tilde{q}(z_1))\tilde{q}(z)}{\tilde{q}(z)(z-z_1)^{m_1}}$$

Zählerpolynom null für $z = z_1 \quad \Longrightarrow \quad$ Darstellung als Produkt $\tilde{g}(z)(z-z_1)$ und, nach Kürzen des Linearfaktors,

$$\tilde{r}(z) = \frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{q}(z)(z-z_1)^{m_1-1}}$$

mit

$$\operatorname{Grad} \tilde{g} = \max(\operatorname{Grad} g, \operatorname{Grad} \tilde{q}) - 1 < \operatorname{Grad} q - 1 = \operatorname{Grad} \tilde{q} + (m_1 - 1)$$

$\rightsquigarrow$ Iteration der Prozedur mit dem jeweils führenden Term zu einer der Polstellen
$\rightsquigarrow$ sukzessive Reduktion der Ordnung der Polstellen durch Bestimmung und Subtraktion aller Terme der Hauptteile

c) Eindeutigkeit:
Annahme

$$f(z) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{j,k}}{(z - z_j)^k} = \tilde{f}(z) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\tilde{a}_{j,k}}{(z - z_j)^k}$$

Multiplikation mit $(z - z_1)^{m_1}$ und Setzen von $z = z_1$
$\implies \quad a_{1,m_1} = \tilde{a}_{1,m_1}$
Weglassen der entsprechenden identischen Terme auf beiden Seiten

Iteration der Prozedur bis die Gleichheit aller Koeffizienten $a_{j,k}$ gezeigt ist und dann ebenfalls $f = \tilde{f}$ gefolgert werden kann

Beispiel

Partialbruchzerlegung von

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^3}{z^2 + z - 2}$$

(i) Polynomialer Anteil (Zählergrad $\geq$ Nennergrad):
Polynomdivision $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{array}{rl}
(\,z^3\,) : \ (z^2 + \ \ z - 2) = z - 1 + \dfrac{3z - 2}{z^2 + z - 2} & \\
-(\underline{z^3 \quad + z^2 - 2z}\,) & \\
-z^2 + 2z & \\
-(\underline{-z^2 - \ \ z + 2}) & \\
3z - 2 &
\end{array}$$

und somit $r = f + g/q$ mit

$$f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2$$

(ii) Polstellen und Ansatz:
Lösungsformel für die quadratische Gleichung $q(z) = z^2 + z - 2 = 0$
$\rightsquigarrow$ Polstellen $z_1 = 1$ und $z_2 = -2$ und

$$q(z) = (z-1)(z+2)$$

Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{g(z)}{q(z)} = \frac{3z-2}{(z-1)(z+2)} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z+2}$$

(iii) Bestimmung der Koeffizienten a_k:
Grenzwertmethode $\rightsquigarrow$

$$a_1 = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{3z-2}{(z-1)(z+2)} = \left. \frac{3z-2}{z+2} \right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

analog

$$a_2 = \left. \frac{3z-2}{z-1} \right|_{z=-2} = \frac{8}{3}$$

insgesamt

$$r(z) = f(z) + \frac{g(z)}{q(z)} = (z-1) + \left(\frac{1/3}{z-1} + \frac{8/3}{z+2} \right)$$

Beispiel

Partialbruchzerlegung von

$$r(z) = \frac{5z^2 - 5z + 6}{z^3 - 3z^2}$$

einfache Polstelle bei $z_1 = 3$, doppelte Polstelle bei $z_2 = 0$
Zählergrad $<$ Nennergrad $\quad\Longrightarrow\quad$ keine Polynomdivision notwendig
Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$r(z) = \frac{5z^2 - 5z + 6}{z^3 - 3z^2} = \frac{5z^2 - 5z + 6}{z^2(z-3)} = \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{z-3}$$

Grenzwertmethode $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{z\to 0} z^2 r(z) = \left.\frac{5z^2 - 5z + 6}{z-3}\right|_{z=0} = -2 \\ a_3 &= \lim_{z\to 3} (z-3) r(z) = \left.\frac{5z^2 - 5z + 6}{z^2}\right|_{z=3} = 4 \end{aligned}$$

Vergleich der Funktionswerte an einem Punkt $z \neq 0 \wedge z \neq 3$, z.B. $z = 1$ $\rightsquigarrow$

$$r(1) = \left.\frac{5z^2 - 5z + 6}{z^3 - 3z^2}\right|_{z=1} \stackrel{!}{=} \left.\left(-\frac{2}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \frac{4}{z-3}\right)\right|_{z=1},$$

bzw.

$$\frac{5 - 5 + 6}{1 - 3} = -2 + a_2 - 2$$

d.h. $a_2 = 1$ und

$$r(z) = -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{4}{z-3}$$

Beispiel

Partialbruchzerlegung von

$$r(z) = \frac{z^2 - 5z + 4}{z^3 - 3z^2 + z + 5}$$

(i) Polstellen und Ansatz:
reelle Polstelle $z_1 = -1$
Polynomdivision $\quad\leadsto$

$$(z^3 - 3z^2 + z + 5) : (z+1) = z^2 - 4z + 5$$

Lösungsformel für die quadratische Gleichung $q(z) = z^2 - 4z + 5 = 0$
$\leadsto\quad$ komplex konjugierte Polstellen

$$z_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 5} = 2 \pm \mathrm{i}$$

Faktorisierung des Nennerpolynoms

$$q(z) = (z+1)(z-2-\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i})$$

Ansatz

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-\mathrm{i}} + \frac{c}{z-2+\mathrm{i}}$$

(ii) Koeffizientenvergleich:
Multiplikation mit dem Hauptnenner $\quad \rightsquigarrow$

$$z^2 - 5z + 4 = \\ a(z-2-\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i}) + b(z+1)(z-2+\mathrm{i}) + c(z+1)(z-2-\mathrm{i})$$

Vergleich der Koeffizienten von 1, z, z^2 $\quad \rightsquigarrow \quad$ lineares Gleichungssystem für a, b und c:

$$\begin{aligned} 4 &= (-2-\mathrm{i})(-2+\mathrm{i})a + (1)(-2+\mathrm{i})b + (1)(-2-\mathrm{i})c \\ &= 5a + (-2+\mathrm{i})b + (-2-\mathrm{i})c \\ -5 &= -4a + (-1+\mathrm{i})b + (-1-\mathrm{i})c \\ 1 &= a + b + c \end{aligned}$$

Lösung: $a = 1$, $b = \mathrm{i}/2$ und $c = -\mathrm{i}/2$
(r reell $\quad \Longrightarrow \quad c = \bar{b}$, d.h. nur b muss berechnet werden, bzw. man kann die Identität zur Kontrolle nutzen)

Einsetzen der Koeffizienten in den Ansatz

$\rightsquigarrow$ komplexe Partialbruchzerlegung

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{\mathrm{i}/2}{z-2-\mathrm{i}} + \frac{-\mathrm{i}/2}{z-2+\mathrm{i}}$$

Zusammenfassen der komplex konjugierten Terme

$\rightsquigarrow$ reelle Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{1}{z+1} + \frac{(\mathrm{i}/2)(z-2+\mathrm{i}) - (\mathrm{i}/2)(z-2-\mathrm{i})}{(z-2+\mathrm{i})(z-2-\mathrm{i})} \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z^2-4z+5} \end{aligned}$$

Reelle Partialbruchzerlegung

Eine reelle rationale Funktion r mit reellen Polstellen x_j und komplex konjugierten Polstellen $u_k \pm \mathrm{i}v_k$ der Vielfachheit m_j bzw. n_k,

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = c \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k},$$

lässt sich in der Form

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu=1}^{m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu=1}^{n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

zerlegen, mit einem Polynom f vom Grad $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ ($f = 0$, falls $d < 0$). Die Zahl der Summanden für x_j bzw. $u_k \pm \mathrm{i}v_k$ ist jeweils gleich der Ordnung der entsprechenden Polstelle.

Insbesondere gilt für einfache Polstellen

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}\,.$$

Das Polynom f kann durch Polynomdivision bestimmt werden

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q\,,$$

d.h. g ist der Rest bei Division von p durch q. Die Koeffizienten lassen sich dann durch Koeffizientenvergleich in der Darstellung von $r - f = g/q$ nach Multiplikation mit dem Nennerpolynom berechnen. Alternativ kann man ohne Bestimmung von f auch unmittelbar einen Koeffizientenvergleich in der Identiät

$$p(x) = f(x)q(x) + \left(\sum_j \ldots + \sum_k \ldots\right) q(x)$$

durchführen.

Die reelle Partialbruchzerlegung lässt sich ebenfalls aus der komplexen Form gewinnen, indem man komplex konjugierte Terme zusammenfasst.

Beweis

Zerlegung für einfache Polstellen ($m_j = n_k = 1$):
komplexe Partialbruchzerlegung $\quad\rightsquigarrow$

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - z_j}$$

mit z_j den (einfachen) Nullstellen des Nennerpolynoms q und

$$a_j = \lim_{z \to z_j} (z - z_j) r(z)$$

q reell $\quad\rightsquigarrow\quad$ reelle oder Paare komplex konjugierter Nullstellen

$$z_k = u + \mathrm{i}v, \quad z_\ell = u - \mathrm{i}v = \overline{z_k}$$

Koeffizienten der entsprechenden Terme der Zerlegung

$$\overline{a_k} = \lim_{z \to z_k} \overline{(z - z_k)r(z)} = \lim_{\bar{z} \to z_\ell} (\bar{z} - z_\ell) r(\bar{z}) = a_\ell$$

d.h.

$$a_k = s + \mathrm{i}t, \quad a_\ell = s - \mathrm{i}t$$

Zusammenfassen der komplex konjugierten Terme $\leadsto$

$$\frac{s + \mathrm{i}t}{x - u - \mathrm{i}v} + \frac{s - \mathrm{i}t}{x - u + \mathrm{i}v} = \frac{2s(x - u) - 2tv}{(x - u)^2 + v^2}$$

d.h.

$$b = 2s, \quad c = -2t$$

analoge (technisch aufwändigere) Argumentation für Polstellen höherer Ordnung

Beispiel

Reelle Partialbruchzerlegung von

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^3 - 9x^2 + 11x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

(i) Polynomdivision: (Grad $p \geq$ Grad q):

$$\begin{array}{l} \quad (2x^3 \; -9x^2 \; +11x \;\; +1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2, \text{ Rest } g(x) = -x^2 + x + 1 \\ \underline{-(2x^3 \; -8x^2 \; +10x)\quad} \\ \qquad\quad -x^2 \;\; +x \qquad +1 \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ polynomialer Anteil $f(x) = 2$ und Zerlegung

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

(ii) Faktorisierung des Nennerpolynoms and Ansatz:
Polstelle $x_1 = 0$
weitere Polstellen durch quadratische Ergänzung

$$q(x)/x = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1^2$$

$\rightsquigarrow \quad x_{2,3} = u \pm \mathrm{i}v = 2 \pm \mathrm{i}$ und entsprechende Faktorisierung des Nennerpolynoms

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 5x &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x - 3) \\ &= x(x - 2 + \mathrm{i})(x - 2 - \mathrm{i}) = x((x-2)^2 + 1) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad$ Ansatz

$$\frac{g(x)}{q(x)} = \frac{-x^2 + x + 1}{x((x-2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x-2) + c}{(x-2)^2 + 1^2}$$

(iii) Koeffizientenvergleich:
Multiplikation mit dem Nennerpolynom q im Ansatz $\rightsquigarrow$

$$-x^2 + x + 1 \;=\; a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

Vergleich der Koeffizienten von 1, x und x^2 $\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= 5a \\ 1 &= -4a - 2b + c \\ -1 &= a + b \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = -\frac{6}{5}, \quad c = -\frac{3}{5}$$

resultierende reelle Partialbruchzerlegung

$$r(x) = f(x) + \frac{p(x)}{q(x)} = 2 + \left(\frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2} \right)$$

Alternative Methode

Bestimmung der Ansatzparameter für den rationalen Anteil mit der Grenzwertmethode

Multiplikation von $g(x)/q(x)$ mit x und Setzen von $x = 0$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{1}{5}$$

Setzen von $x = 2$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \quad\Longrightarrow\quad c = -\frac{3}{5}$$

Bestimmung von b durch Testen eines Punktes $x \neq 2$, z.B. $x = 1$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\frac{-1^2 + 1 + 1}{1 \cdot ((1-2)^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{1} + \frac{b(1-2) + (-3/5)}{(1-2)^2 + 1^2} \quad\Longrightarrow\quad b = -6/5$$

Beispiel

reelle Partialbruchzerlegung von

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

(i) Polstellen und Ansatz:

$$q(x) = (x^2 + 1)^2$$

$\implies$ doppelte Polstellen $\pm$i, d.h. $u = 0$ und $v = 1$

Ansatz

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1 x + c_1}{x^2 + 1} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2+1)^2}$$

(ii) Bestimmung der Koeffizienten:
Multiplikation des Ansatzes mit q $\leadsto$

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1 x + c_1)(x^2 + 1) + b_2 x + c_2 \\ &= b_1 x^3 + c_1 x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2) \end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten von 1, x, x^2 und x^3 $\leadsto$ lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1 + b_2 \\ 0 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$b_1 = 1, \quad c_1 = 0, \quad b_2 = -1, \quad c_2 = 0$$

Alternative Methode

Verwendung der komplexen Partialbruchzerlegung:

Ansatz

$$\frac{z^3}{(z-\mathrm{i})^2(z+\mathrm{i})^2} = \frac{a}{z-\mathrm{i}} + \frac{b}{(z-\mathrm{i})^2} + \frac{c}{z+\mathrm{i}} + \frac{d}{(z+\mathrm{i})^2}$$

Grenzwertmethode $\quad\rightsquigarrow$

$$b = \lim_{z\to\mathrm{i}} (z-\mathrm{i})^2\, r(z) = \frac{\mathrm{i}^3}{(\mathrm{i}+\mathrm{i})^2} = \frac{\mathrm{i}}{4}$$

$d = \overline{b} = -\mathrm{i}/4 \quad \rightsquigarrow \quad$ ein Term der Zerlegung

$$\frac{\mathrm{i}/4}{(z-\mathrm{i})^2} - \frac{\mathrm{i}/4}{(z+\mathrm{i})^2} = \frac{-z}{(z^2+1)^2}$$

zweiter Term

$$r(z) - \frac{-z}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{z^2+1}$$