Nullstellen und Faktorisierung eines Polynoms

Ein Polynom p vom Grad n besitzt, einschließlich Vielfachheiten, genau n komplexe Nullstellen z_k und lässt sich somit als Produkt der entsprechenden Linearfaktoren schreiben:

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

mit einer Konstanten c, dem Koeffizienten von z^n.

Ist p reell, so treten komplexe Nullstellen in komplex konjugierten Paaren $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ auf. Eine reelle Faktorisierung kann also neben reellen Linearfaktoren auch quadratische Faktoren der Form

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

enthalten.

Die Nullstellen eines quadratischen Polynoms,

$$p(z) = cz^2 + bz + a\,,$$

lassen sich explizit angeben:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}\,.$$

Für Grad drei und vier erhält man mit den Cardanischen Formeln ebenfalls explizite algebraische Ausdrücke. Für höhere Grade müssen im Allgemeinen numerische Verfahren verwendet werden. Ist jedoch eine Nullstelle bekannt, so kann man durch den entsprechenden Linearfaktor dividieren,

$$q(z) = p(z)/(z - z_1)\,,$$

und $z_2, \ldots, z_n$ als Nullstellen des Polynoms q vom Grad $n - 1$ bestimmen.

Beweis

(i) Faktorisierung:

Fundamentalsatz der Algebra

$\implies$ Existenz einer (komplexen) Nullstelle z_1

Division durch den Linearfaktor $(z - z_1)$ und rekursive Anwendung des Satzes $\leadsto$ Faktorisierung

(ii) Polynom mit reellen Koeffizienten:

$p_k \in \mathbb{R} \implies$

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} p_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \bar{z}^k = p(\bar{z})$$

$\leadsto$ Paare komplex konjugierter Nullstellen, denn

$$p(z) = 0 \implies p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = \bar{0} = 0$$

Beispiel

Faktorisierung des kubischen Polynoms

$$p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$$

ausgehend von der bekannten Nullstelle $z_1 = 1$

Division durch den Linearfaktor $(z - 1)$ zur Nullstelle $z_1 = 1$

$$\begin{array}{l}
(\,z^3 - 5z^2 + 9z - 5\,) : (\,z - 1\,) = z^2 - 4z + 5 \\
\underline{\;z^3 \;\; - z^2\;} \\
\qquad -4z^2 + 9z \\
\qquad \underline{-4z^2 + 4z\;} \\
\qquad\qquad\quad 5z - 5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{5z - 5} \\
\qquad\qquad\qquad\;\; 0
\end{array}$$

$\rightsquigarrow \quad p(z) = (z-1)q(z)$ mit dem quadratischen Polynom

$$q(z) = z^2 - 4z + 5$$

Nullstellen von $q \quad \rightsquigarrow \quad$ restliche zwei Nullstellen von p

$$z_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm \mathrm{i}$$

- Komplexe Faktorisierung:

$$p(z) = (z-1)(z-2-\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i})$$

- Reelle Faktorisierung:
  Zusammenfassen der komplex konjugierten Faktoren,

$$(z-2-\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i}) = (z-2)^2 + 1\,,$$

$\rightsquigarrow$

$$p(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 5)$$

Beispiel

Nullstellen des Polynoms

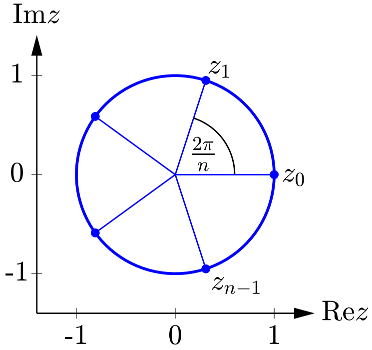
$$p(z) = z^n - 1$$

n-te Einheitswurzeln (Lösungen von $z^2 = 1$):

$$z_k = \exp(2k\pi\mathrm{i}/n),\ k = 0, \ldots, n-1$$

$\rightsquigarrow$ komplexe Faktorisierung

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \exp(2k\pi\mathrm{i}/n))$$



Zusammenfassen komplex konjugierter Faktoren mit Hilfe der Formel von Euler-Moivre ($e^{it} + e^{-it} = 2\cos t$),

$$(z - \exp(it))(z - \exp(-it)) = z^2 - 2z\cos t + 1\,,$$

$\rightsquigarrow$ reelle Faktorisierung

- Gerades n:

$$p(z) = (z-1)(z+1) \prod_{k=1}^{n/2-1} (z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1)$$

- Ungerades n:

$$p(z) = (z-1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1)$$