Newton-Verfahren

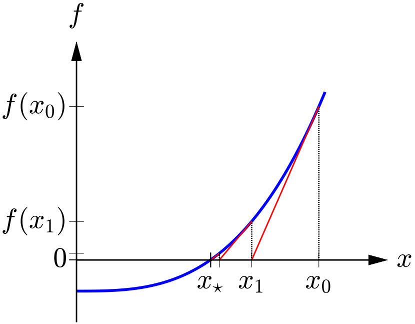
Mit dem Newton-Verfahren kann eine Nullstelle $x_\star$ einer Funktion f numerisch bestimmt werden. Dabei wird durch Linearisierung eine Folge x_0, x_1 ... von Approximationen für $x_\star$ generiert. Die Näherung $x_{\ell+1}$ ist der Schnittpunkt der Tangente im Punkt $(x_\ell, f(x_\ell))$ mit der x-Achse:

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$

Für eine einfache Nullstelle $x_\star$, d.h. falls $f'(x_\star) \neq 0$, konvergiert die Newton-Iteration lokal quadratisch:

$$\left|x_{\ell+1} - x_\star\right| \leq c \left|x_\ell - x_\star\right|^2$$

für Startpunkte x_0 in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x_\star$.



Beweis

lineare Taylor-Approximation $\rightsquigarrow$

$$0 = f(x_\star) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_\star - x_\ell) + R$$

mit dem Restglied

$$R = \frac{1}{2}\, f''(t_\ell)(x_\star - x_\ell)^2 \quad \text{für ein } t_\ell \text{ zwischen } x_\star \text{ und } x_\ell$$

Einsetzen von

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_\star) - R$$

in die Iterationsvorschrift $x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell) \quad \Longrightarrow$

$$x_{\ell+1} = x_\star + R/f'(x_\ell)$$

$f'(x_\ell) \neq 0 \quad \Longrightarrow$

$$|x_{\ell+1} - x_\star| = c_\ell |x_\ell - x_\star|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)}\right|$$

$f'(x_\star) \neq 0 \quad \Longrightarrow$

c_ℓ für x_ℓ in einer Umgebung $[x_\star - \delta, x_\star + \delta]$ von $x_\star$ beschränkt: $c_\ell \leq c$

$\rightsquigarrow$ quadratische Konvergenz

Beispiel

Babylonisches Wurzelziehen

$$x \to (x + a/x)/2 \quad (a > 0)$$

$\rightsquigarrow$ Näherung für $\sqrt{a}$

Newton-Verfahren für $f(x) = x^2 - a$:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x} = x - f(x)/f'(x)$$

Approximationen für $a = 2, x_0 = 1$

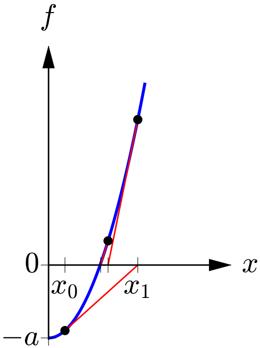
$$\begin{array}{l}
\underline{1} \\
\underline{1}.5 \\
\underline{1.41}666666666666666666666666666666667 \\
\underline{1.41421}568627450980392156862745098039 2157 \\
\underline{1.41421356237}468991062629557889013491 0117 \\
\underline{1.41421356237309504880168}9623502530243615 \\
\underline{1.41421356237309504880168872420969807857 0}
\end{array}$$

annähernde Verdopplung der Anzahl der korrekten Stellen pro Schritt quadratische Konvergenz

$$\begin{aligned} x_{\ell+1} - \sqrt{a} &= (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2x_\ell}\,(x_\ell - \sqrt{a}\,)^2 \end{aligned}$$

geometrische Interpretation des Newton-Verfahrens

$\Longrightarrow$ Konvergenz für alle $x_0 \neq 0$



Beispiel

Visualisierung der Konvergenz der komplexen Newton-Iteration für die Gleichung

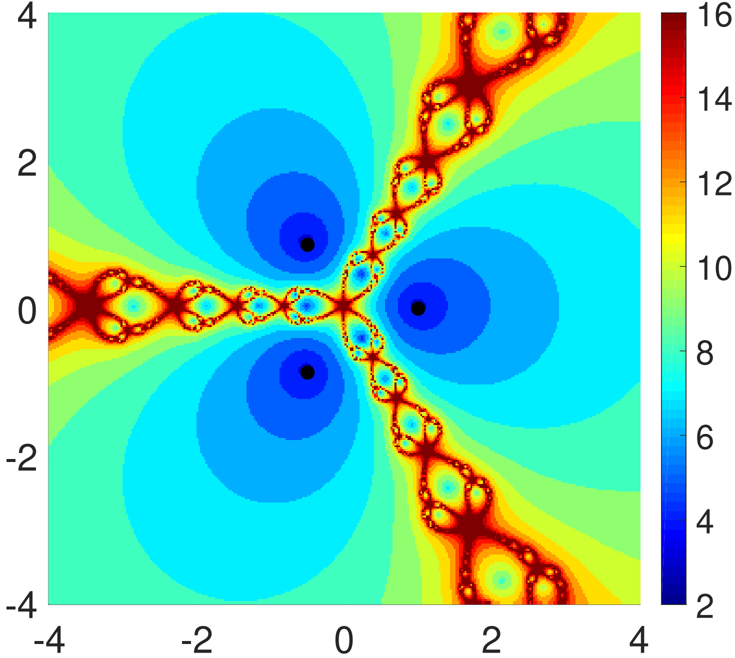
$$z^3 - 1 = 0$$

mit den Lösungen $z = \exp(2\pi\mathrm{i}k/3)$, $k = 0, 1, 2$

$f'(z) = 3z^2 \quad \rightsquigarrow \quad$ Iteration

$$z_{\ell+1} = z_\ell - \frac{z_\ell^3 - 1}{3z_\ell^2} = \frac{2}{3} z_\ell + \frac{1}{3} \frac{1}{z_\ell^2}$$

blaue Farbtöne $\iff$ schnellere Konvergenz
fraktaler Charakter der Ränder der Konvergenzgebiete



4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4
16
14
12
10
8
6
4
2

MATLAB-Skript zur Generierung der Grafik

```
>> N = 16;    % maximale Iterationszahl (=N: Divergenz)
>> tol = 1.0e-8;   % Toleranz (|z-z_alt|<tol: Konvergenz)
>> % Startwerte im Abstand 0.01 in [-4,4]^2
>> [x,y] = meshgrid([-4:0.01:4]); z = x+i*y;
>> c = 0*z;     % Farbindex
>> for n=1:N
>>    % simultaner Newton-Schritt
>>    z_alt = z; z = 2*z_alt/3+1./(z_alt.^2*3);
>> % Erhoehung des Farbindex fuer nicht konvergente Punkte
>>    c = c+(abs(z-z_alt)>tol);
>> end
>> % Konvertierung in ein Pixel-Bild
>> imagesc([-b b],[-b b],c)
>> colormap(jet), colorbar   % Farbskala
```