Multiplikation von Taylor-Reihen

Taylor-Reihen können gliedweise multipliziert werden:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

mit

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j}g_j\,.$$

Die ersten Terme der Taylor-Reihe des Produktes sind

$$f_0g_0 + (f_1g_0 + f_0g_1)(x-a) + (f_2g_1 + f_1g_1 + f_0g_2)(x-a)^2 + \cdots\,.$$

Der Konvergenzradius ist gleich dem Minimum der Konvergenzradien der beiden Faktoren.

Beispiel

Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos(\omega t)$$

(i) Multiplikation der Taylor-Reihen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots \\
\cos(\omega t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\mathrm{e}^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{1}{6}\right) t^3 + \cdots$$

(ii) Komplexe Darstellung:
Formel von Euler-Moivre $\quad\Longrightarrow$

$$\mathrm{e}^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\omega-1)t}\right)$$

Einsetzen der Entwicklung der Exponentialfunktion $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-t}\cos(\omega t) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}\omega-1)^k t^k}{k!}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(1+(\mathrm{i}\omega-1)t+\frac{(\mathrm{i}\omega-1)^2}{2!}\,t^2+\frac{(\mathrm{i}\omega-1)^3}{3!}\,t^3+\cdots\right)\\
&= 1-t+\frac{1-\omega^2}{2}\,t^2+\frac{3\omega^2-1}{6}\,t^3+\cdots
\end{aligned}$$