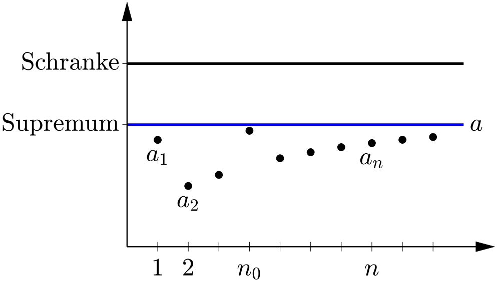
Monotone Konvergenz

Eine Folge (a_n) heißt monoton wachsend bzw. monoton fallend, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n. Sie heißt streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend, wenn die entsprechende Ungleichung strikt ist ($>$ bzw. $<$ statt $\geq$ bzw. $\leq$).

Eine beschränkte, für $n > n_0$ monoton wachsende oder fallende Folge (a_n) ist konvergent. Der Grenzwert ist das Supremum bzw. Infimum der Folgenelemente a_n, $n > n_0$.



Beweis

Definition des Supremums als kleinste obere Schranke $\implies$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, n_\varepsilon : \quad a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n > n_0} a_n$$

Monotonie $\implies$

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a \, \text{für} \, n > n_\varepsilon \, ,$$

also $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > n_\varepsilon$, d.h. $a_n \to a$

analoge Argumentation für monoton fallende Folgen

Beispiel

Eulersche Zahl

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(1+1/n)^n}_{a_n} = 2.7182$$

monotone Konvergenz $\quad\rightsquigarrow\quad$ Existenz des Grenzwertes

(i) Beschränktheit:

binomische Formel $\quad\rightsquigarrow$

$$a_n = (1+1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \le \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$

$\implies \quad a_n \le 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \le 3$

(ii) Monotonie:
binomische Formel $\quad\rightsquigarrow$

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots$$

größere Terme als in der Darstellung von a_n:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k} \le$$
$$\frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} = \binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k}\,,$$

denn

$$\frac{n-j}{n} \le \frac{n+1-j}{n+1}, \quad j = 0,\ldots,k-1$$