Majorante und Minorante

Ist

$$|a_n| \leq c|b_n| \quad \text{für} \quad n \geq n_0$$

mit einer Konstanten c, so folgt aus der absoluten Konvergenz von $\sum_n b_n$ die absolute Konvergenz von $\sum_n a_n$.

Gilt umgekehrt $|a_n| \geq c|b_n|$ mit $c > 0$ für alle bis auf endlich viele n, so folgt aus der Divergenz von $\sum_n |b_n|$, dass auch $\sum_n a_n$ nicht absolut konvergent ist.

Häufig werden die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r},$$

die für $0 < q < 1$ bzw. $1 < r$ absolut konvergent sind, als Vergleichsreihen benutzt.

Beispiel

Nachweis von Konvergenz bzw. Divergenz durch Vergleich mit der geometrischen und harmonischen Reihe

(i) Majorante für $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$:

Vergleich mit der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = 1/2 \quad \Longrightarrow$ Konvergenz:

$$a_n = \left(\frac{(2n)!}{(2n-n)!\, n!}\right)^{-1} = \frac{n!}{(2n)!\,/\,n!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots 1}{(2n)\cdot(2n-1)\cdots(n+1)} \le 2^{-n}$$

(ii) Minorante für $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$:

Vergleich mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n \quad \Longrightarrow \quad$ Divergenz:

$$a_n \ge \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}, \quad n > n_0 = 9$$