

Natürlicher Logarithmus

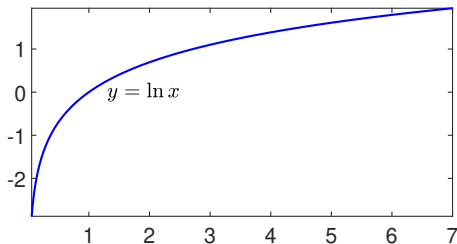
Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion:

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$

Sie bildet $(0, \infty)$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R} ab, ist konkav und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Insbesondere ist $\ln(1/x) = -\ln x$.



Radioaktiver Zerfall

Anzahl N der Atome zum Zeitpunkt t

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

Halbwertszeit T

$$N(T) = \frac{1}{2}N(0) \Leftrightarrow e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2 / \lambda$$

Tschernobyl \rightsquigarrow Verstrahlung von Pilzen mit 2000 Bq/kg durch Cäsium-137 (Halbwertszeit: 29.7 Jahre)

$$N(t) = 2000 \exp(-\lambda t), \quad \lambda = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

\rightsquigarrow Erreichen des zulässigen Grenzwertes von 600 Bq/kg nach $t = 52$ Jahren:

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \implies -0.023t = \underbrace{\ln(600/2000)}_{0.3}$$

Beispiel

Rechenschieber

Funktionalgleichung

$$\log x + \log y = \log(xy)$$

↪ Berechnung eines Produktes durch Aneinanderlegen (Summe) zweier Lineale mit logarithmischer Skala

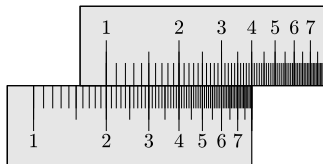


Abbildung: $2 \cdot 3 = 6$

Addition von $\ln 3$ (Abstand der Markierungen 1 und 3 im oberen Lineal) zu $\ln 2$ (Abstand der Markierungen 1 und 2 im unteren Lineal) $\rightsquigarrow \ln 6$ (unteres Lineal)