Logarithmische Ableitung

Für eine positive Funktion $y = f(x)$ folgt aus der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln f(x) = \frac{\mathrm{d} \ln y}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} f'(x)$$

bzw. nach Umformung

$$f'(x) = f(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln f(x) \, .$$

Diese Identität kann zur Differentiation von Funktionen der Form $f(x) = g(x)^{h(x)}$ mit $g(x) > 0$ benutzt werden. Man erhält

$$f'(x) = g(x)^{h(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(h(x) \ln g(x) \right) .$$

Beispiel

Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$, $x > 0$

logarithmisches Ableiten, $f' = f\,(\ln f)'$ $\quad\rightsquigarrow$

$$f'(x) = x^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(x^x) = x^x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1)$$

$x \to 0$:
$\ln x^x = x \ln x \to 0$
$\implies \quad f(x) = x^x \to \mathrm{e}^0 = 1$
f rechtsseitig stetig bei 0

Ableitung bei 0 singulär, da

$$x^x \to 1, \quad \ln x + 1 \to -\infty$$