Limes Inferior und Limes Superior

Für jede Folge (a_n) existieren, gegebenenfalls im uneigentlichen Sinn, die Grenzwerte

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n\,, \ \underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_k\,, \\ \limsup_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n\,, \ \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_k\,. \end{aligned}$$

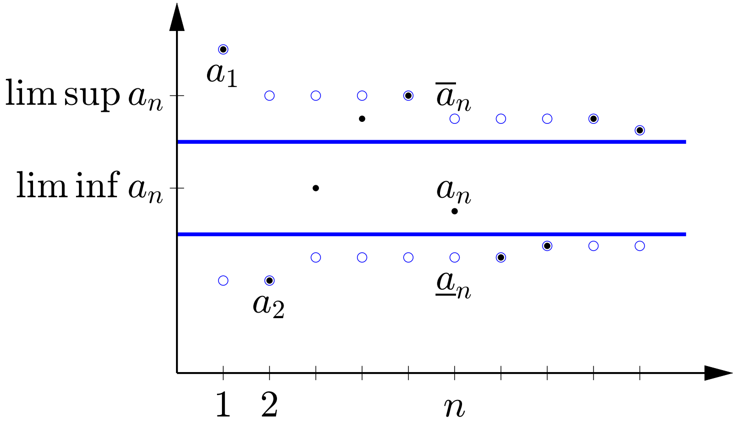
Man benutzt ebenfalls die Schreibweisen $\liminf = \underline{\lim}$ bzw. $\limsup = \overline{\lim}$.

Wie in der Abbildung illustriert ist, wird die Folge (a_n) (Punkte) durch die monotonen Folgen $(\underline{a}_n)$ und $(\overline{a}_n)$ (Kreise) eingeschlossen:

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n\,.$$

Stimmen Limes Inferior und Limes Superior überein, so konvergiert die Folge (a_n) und

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n\,.$$


$\limsup a_n$
$\liminf a_n$
a_1
a_2
$\overline{a}_n$
a_n
$\underline{a}_n$
1
2
n

Beiweis

(i) Existenz von $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$:
monotone Konvergenz von

$$\underline{a}_n = \inf_{k \geq n} a_k\,, \quad \overline{a}_n = \sup_{k \geq n} a_k$$

(ii) Konvergenz bei Übereinstimmung von $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$:

- Endlicher gemeinsamer Grenzwert

$$\underline{\lim} a_n = \lim \underline{a}_n = a = \lim \overline{a}_n = \overline{\lim} a_n\,.$$

Definition eines Grenzwerts, Monotonie der Folgen $\underline{a}_n$, $\overline{a}_n$ $\quad \Longrightarrow$

$$a - \varepsilon < \underline{a}_n \leq a, \quad n > \underline{n}_\varepsilon$$
$$a \leq \overline{a}_n \leq a + \varepsilon, \quad n > \overline{n}_\varepsilon$$

$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n \quad \Longrightarrow$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

für $n > \max(\underline{n}_\varepsilon, \overline{n}_\varepsilon)$, d.h. die Konvergenz von a_n gegen a.

- Uneigentlicher gemeinsamer Grenwert: $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = \infty$
  Definition des Limes Inferior $\implies$ Konvergenz der monoton wachsenden Folge $\underline{a}_n = \inf_{m \geq n} a_m, \quad n = 1, 2, \ldots$, gegen ∞, d.h.

$$\forall a \, \exists n_a : \, \underline{a}_n > a \quad \text{für } n > n_a \, ,$$

  insbesondere $a_{n_a+1} = \inf_{m \geq n_a+1} a_m > a$
  $\implies \quad a_m > a$ für $m > n_a$ und damit folgt die Gültigkeit des Kriteriums für die Konvergenz der Folge (a_n) gegen ∞
  analoge Argumentation für den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$