Leibniz-Kriterium

Die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

konvergiert, falls (a_k) eine monotone Nullfolge ist.
Für den Reihenrest gilt

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq |a_{n+1}| \,.$$

Der Betrag einer alternierenden Summe kann also immer durch den Betrag des ersten Summanden abgeschätzt werden.

Beweis

Die Gültigkeit des Cauchy-Kriteriums folgt aus folgender Abschätzung für die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, a_k$

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \cdots \pm a_m| \leq |a_{n+1}| \quad (m > n)$$

$m \to \infty \quad \rightsquigarrow \quad$ Abschätzung für den Reihenrest

Beweis dieser Ungleichung (o.B.d.A. $a_{n+1} \geq 0$)

(i) Obere Schranke:

$$s_m - s_n = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \cdots \leq a_{n+1}$$

(letzter Term $-(a_m)$ oder $-(a_{m-1} - a_m)$)

(ii) Untere Schranke:

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \cdots \geq 0 \geq -a_{n+1}$$

Beispiel

Illustration der Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums

(i) Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$$

Leibniz-Kriteriums anwendbar, da $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, eine monotone Nullfolge ist

Abschätzung des Reihenrestes

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln\, 2 \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

(ii) Notwendigkeit der Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums:

- Divergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \cdots,$$

  da $a_n = (n+1)/n$ keine Nullfolge ist

  Cauchy-Kriterium verletzt:

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

- Divergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max\left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \cdots,$$

  da der Betrag der Summanden nicht monoton ist

  Minorante $\sum_n 1/n$ bei Zusammenfassen von je 2 Summanden:

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \frac{n-1}{(2n-1)(2n)} \geq \frac{1}{8n}, \quad n > 1$$