Landau-Symbole

Man schreibt

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (x \to a)\ ,$$

wenn es eine Konstante c gibt, so dass $|f(x)| \leq c|g(x)|$ für x in einer Umgebung von a.

Strebt $|f(x)|/|g(x)|$ gegen 0 für $x \to a$, so schreibt man entsprechend

$$f(x) = o(g(x))\,.$$

In beiden Fällen ist $a = \pm\infty$ zulässig, um das asymptotische Verhalten von $f(x)$ für große x zu beschreiben.

Beispiel

Abschätzungen für $(1+x)^r$

(i) $r = n \in \mathbb{N}$:
binomische Formel, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \quad \Longrightarrow$

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

(ii) $-r = n \in \mathbb{N}$:
Erweiterung mit $1 - nx \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1+nx+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1-(nx)^2+(1-nx)O(x^2)} \\ &= \frac{1-nx}{1+O(x^2)} = 1 - nx + O(x^2)\,, \end{aligned}$$

denn $1/(1+O(x^2)) = 1 + O(x^2)$
(iii) $r \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^s = O(x^s) \quad (x \to \infty)\,,$$

denn $x \leq 1 + x \leq 2x$ für $x \geq 1$

Beispiel

Beschreibung von Grenzwerten mit Hilfe von Landau-Symbolen

(i) Grenzwert einer Folge:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \Longleftrightarrow \quad a_n = a + o(1) \quad (n \to \infty)$$

(ii) Stetigkeit bei $x = a$:

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a)$$

(iii) Differenzierbarkeit bei $x = a$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

mit

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0)$$

$r = O(h^2)$ bei glatten Funktionen f