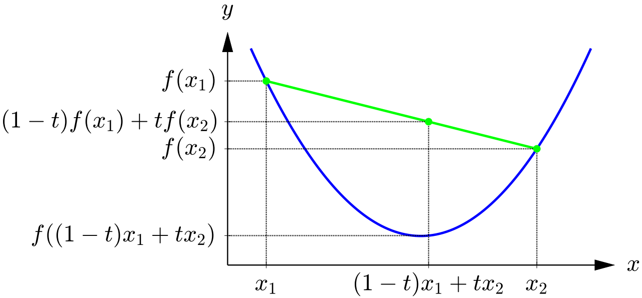
Konvexe und konkave Funktionen

Eine Funktion f ist (strikt) konvex auf einem Intervall D, wenn jede Sekante (echt) oberhalb ihres Graphen liegt, d.h.

$$f((1-t)\,x_1 + tx_2) \overset{(<)}{\leq} (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2)\,, \quad t \in (0,1)$$

für alle $x_i \in D$.



Ist f zweimal stückweise stetig differenzierbar, so ist (strikte) Konvexität äquivalent zu

$$f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

für alle $x \in D$ bis auf isolierte Punkte.
Die Summe konvexer Funktionen ist konvex. Die Operationen $-, \cdot, /$ sowie die Hintereinanderschaltung $\circ$ erhalten die Konvexität im allgemeinen nicht. Schließlich ist jede konvexe Funktion stetig.
Analog definiert man konkav. Für eine konkave Funktion f liegen die Sekanten unterhalb ihres Graphen, d.h. die an der x-Achse gespiegelte Funktion $-f$ ist konvex.

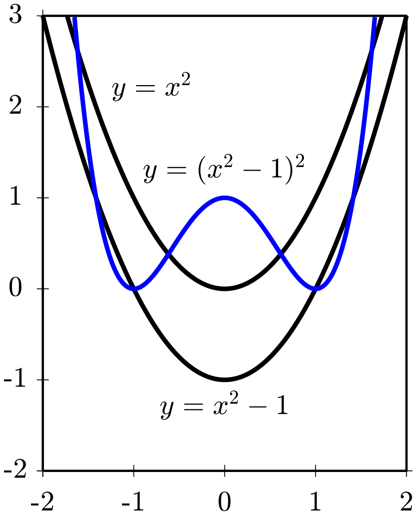
Beweis

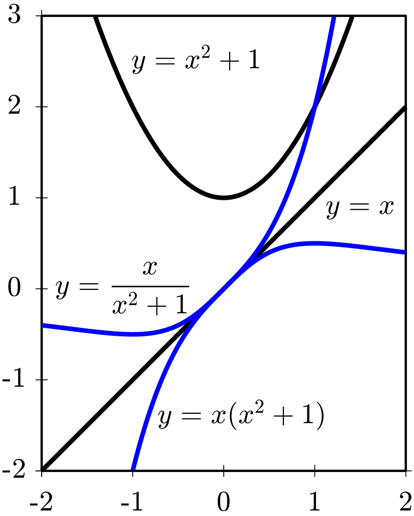
(i) Konvexität der Summe:

f, g konvex $\quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&(f+g)((1-t)x_1 + tx_2) \\
&\quad = f((1-t)x_1 + tx_2) + g((1-t)x_1 + tx_2) \\
&\quad \leq (1-t)\, f(x_1) + t\, f(x_2) + (1-t)\, g(x_1) + t\, g(x_2) \\
&\quad = (1-t)(f+g)(x_1) + t(f+g)(x_2)
\end{aligned}$$

(ii) Andere Verknüpfungen:
i.a. nicht konvexitätserhaltend





(iii) Stetigkeit einer konvexen Funktion:
betrachte einen Punkt a mit $c < a < x < b$, d.h.

$$x = ta + (1-t)b, \quad a = sx + (1-s)c$$

mit $0 < s, t < 1$
Konvexität von $f \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &\leq (1-t)(f(b) - f(a)) \\ f(a) - f(x) &\leq \left(\frac{s-1}{s}\right)(f(a) - f(c)) \end{aligned}$$

nach Umformung der Ungleichungen $f(x) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$ und $f(a) \leq sf(x) + (1-s)f(c)$
$r \leq p \wedge -r \leq q \quad \Longrightarrow \quad |r| \leq \max(|p|, |q|)$ und folglich

$$|f(x) - f(a)| \leq \max(|1-t|, |1-1/s|)\, d, \quad d = \max(|f(b) - f(a)|, |f(a) - f(c)|)$$

$x \to a \quad \Longrightarrow \quad s, t \to 1$ und somit

$$\lim_{x \to a} (f(x) - f(a)) = 0$$

analoge Argumentation für $x < a$