Kettenregel

Für die Verkettung von Funktionen,

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)\,,$$

ist die Ableitung

$$h'(x) = f'(g(x))\,g'(x)\,.$$

Mit $f(y) = z$, $g(x) = y$, $h(x) = z$ schreibt man auch

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,.$$

Beweis

Definition der Ableitung $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

$\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ und $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x))) &= \lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f(g(x)+\tilde{h}))-f(g(x))}{\tilde{h}}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(g(x))\,g'(x)\end{aligned}$$

Beispiel

Ableitung von

$$h(x) = \sin(\ln(1 + x^2))$$

Kettenregel mit

$$w = \sin z, \quad z = \ln y, \quad y = 1 + x^2$$

unter Verwendung der Verwendung der differentiellen Schreibweise $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ &= \cos(z) \cdot \frac{1}{y} \cdot 2x \\ &= \cos(\ln(1 + x^2)) \cdot \frac{1}{1 + x^2} \cdot (2x) \end{aligned}$$

Beispiel

Bestimmung der Ableitung einer implizit durch eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ definierten Funktion $y(x)$ mit der Kettenregel

Illustration der Methode für die Gleichung einer Ellipse

$$E: \; x^2 + 3y^2 = 7$$

Ableitung nach x $\quad \rightsquigarrow$

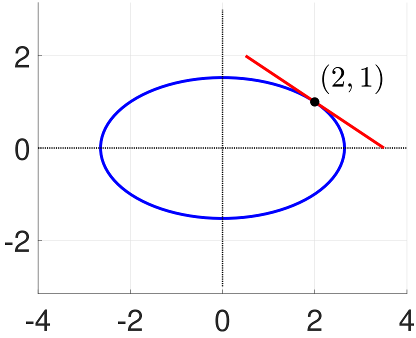
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}7 = 0$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

Steigung der Tangente in einem Punkt auf E mit $y \neq 0$, z.B. $(x, y) = (2, 1)$

$$y'(1) = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}\bigg|_{(x,y)=(2,1)} = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$



Tangentengleichung

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2)$$

höhere Ableitungen:

$$\bigl(2x + 6yy'\bigr)' = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0$$

$\Longrightarrow$

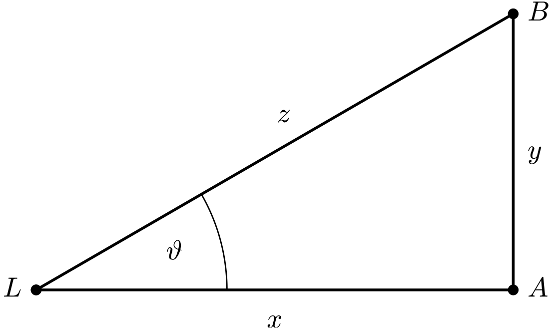
$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

Einsetzen der Koordinaten eines Punktes auf E (y, y' bekannt) $\quad\rightsquigarrow$ konkrete Werte
z.B. $(x, y) = (2, 1) \quad\rightsquigarrow$

$$y''(2) = -\frac{1 + 3(-2/3)^2}{3(1)} = -\frac{7}{9}$$

Beispiel

Leuchtturm-Paradox:
Geschwindigkeit des Lichtsignals/Schattens eines rotierenden Scheinwerfers bei L (1/2 Umdrehung pro Sekunde) entlang einer geradlinig verlaufenden 1 km entfernten Küste



(i) Geschwindigkeit des Schattens:
Winkelgeschwindigkeit des Scheinwerfers

$$\vartheta = 2\pi \frac{t}{2}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \pi$$

Position des Lichtstrahls an der Küste

$$y(t) = \tan \vartheta(t)$$

Geschwindigkeit

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tan\vartheta}{\mathrm{d}\vartheta}\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{\cos^2(\vartheta)} \to \infty \quad \text{für} \quad \vartheta \to \frac{\pi}{2}$$

schnellerer Schatten als das Licht

(ii) Berücksichtigung der Geschwindigkeit des Lichtstrahls:
Zeit des Erreichens von Punkt B

$$t = \frac{\vartheta}{\pi} + \frac{z}{c}$$

mit c der Lichtgeschwindigkeit
Differenzieren $\quad \rightsquigarrow$

$$\frac{\vartheta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}$$

Ableiten von $z^2 = y^2 + 1$ nach $t \quad \rightsquigarrow$

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin\vartheta$$

Einsetzen von ϑ' und z' in Ausdruck für $y' = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t \quad \rightsquigarrow$

$$y' = \frac{\vartheta'}{\cos^2\vartheta} = \frac{1}{\cos^2\vartheta}\left(\pi - \frac{\pi}{c} y' \sin\vartheta\right)$$

Auflösen nach y' $\quad\rightsquigarrow$

$$y' = \frac{c\pi}{c\ \cos^2\vartheta + \pi\sin\vartheta}$$

$\vartheta \to \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad y' \to c$ (konsistent mit Einsteins Theorie)

(iii) Schnellerer Schatten als das Licht:

$$y' \to \infty \quad \text{für} \quad \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} \to -\frac{c}{\pi}\,,$$

d.h. für $\vartheta \approx 4.781 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

kein Widerspruch zu Einsteins Theorie:

beobachtet wird nur ein Phänomen nicht tatsächlich bewegende Materie