Interpolation mit Polynomen

Funktionswerte f_k an $n+1$ paarweise verschiedenen Stützstellen x_k, $k = 0, \ldots, n$, können eindeutig durch ein Polynom p vom Grad $\leq n$ interpoliert werden:

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

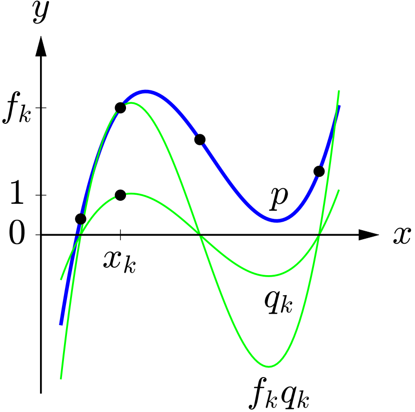
Dieses Interpolationspolynom läßt sich in der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

darstellen, wobei die Polynome q_k als Lagrange-Polynome bezeichnet werden. Sie haben im Punkt x_k den Wert 1 und verschwinden an allen anderen Punkten x_j:

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

mit δ dem Kronecker-Symbol.



y
f_k
1
0
x
x_k
p
q_k
$f_k q_k$

Beweis

(i) Existenz:

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

$\Longrightarrow$

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j$$

$\rightsquigarrow$ Interpolationsbedingungen

(ii) Eindeutigkeit:

Für ein weiteres Interpolationspolynom $\tilde{p}$ hat die Differenz $p - \tilde{p}$ mindestens $n + 1$ Nullstellen:

$$(p - \tilde{p})(x_k) = 0, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

$\mathrm{Grad}(p - \tilde{p}) \leq n \quad \Longrightarrow \quad p = \tilde{p}$, denn ein nicht-triviales Polynom mit Grad $\leq n$ kann höchstens n Nullstellen haben

Beispiel

Schätzung des Minimums einer Funktion f aus den Daten

x	1	2	4
f	3	0	6

mit Hilfe eines interpolierenden quadratischen Polynoms p: $\min f \approx \min p$

Lagrange-Polynome $q_k(x) = \prod_{j \neq k} \dfrac{x - x_j}{x_k - x_j}$

$$
\begin{aligned}
q_0(x) &= \frac{x-2}{1-2}\frac{x-4}{1-4} = \frac{x^2-6x+8}{3} \\
q_2(x) &= \frac{x-1}{4-1}\frac{x-2}{4-2} = \frac{x^2-3x+2}{6}
\end{aligned}
$$

(q_1 wird wegen $f_1 = 0$ nicht benötigt)

Interpolierendes Polynom $p = \sum_{k=0}^{2} f_k q_k$ vom Grad ≤ 2

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 3q_0(x) + 0 + 6q_2(x) \\
q_0(x) &= (x^2 - 6x + 8) + (x^2 - 3x + 2) \\
&= 2x^2 - 9x + 10
\end{aligned}
$$

$0 = p'(x) = 4x - 9 \quad \Longrightarrow \quad$ Minimum bei $x = 9/4$
($p''(x) = 4 > 0$)
$\rightsquigarrow$ Approximation

$$\min f \approx p(9/4) = 2(9/4)^2 - 9(9/4) + 10 = -1/8$$

Beispiel

Schätzung von Zwischenwerten an Stützstellen $x_{k+1/2} = (k + 1/2)h$ durch kubische Interpolation äquidistanter Daten (x_k, f_k), $x_k = kh$

$\rightsquigarrow$ 4-Punkt-Formel

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

Gewichte $-\frac{1}{16}$, $\frac{9}{16}$, $\frac{9}{16}$, $-\frac{1}{16}$: Werte der Lagrange-Polynome an der Stützstelle $x_{k+1/2}$

z.B. Wert für $x_{k+1/2} = (k + 1/2)h$ des Lagrange-Polynoms zu $x_{k-1} = (k - 1)h$ (Null bei x_k, x_{k+1}, x_{k+2})

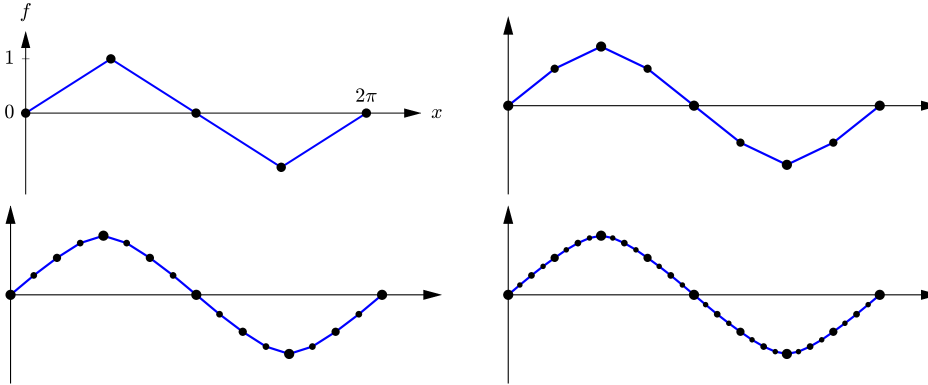
$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x - kh}{(k-1)h - kh} \frac{x - (k+1)h}{(k-1)h - (k+1)h} \frac{x - (k+2)h}{(k-1)h - (k+2)h} \right) \Big|_{x=(k+1/2)h}$$

andere Koeffizienten ohne Rechnung (Symmetrie, Summe 1)

Approximation für die Daten

x_k	$\cdots$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$\cdots$
f_k	$\cdots$	0	1	0	-1	0	$\cdots$

der Sinusfunktion



glatt wirkende Grenzfunktion und deren Ableitung (links) sowie zweite Ableitung (rechts) mit fraktalem Charakter; Approximationen generiert mit Hilfe von Differenzenquotienten

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$