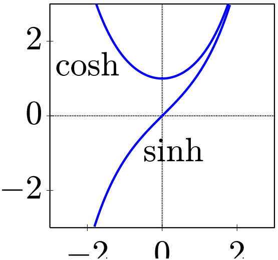
Hyperbelfuntionen

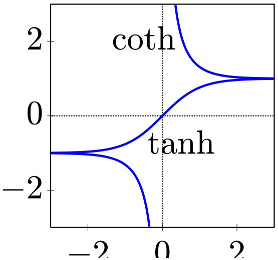
Analog zur Definition der trigonometrischen Funktionen mit Hilfe der Formel von Euler-Moivre definiert man

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

sowie

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x\,.$$

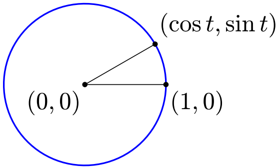


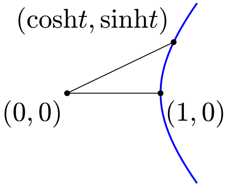


Die Bezeichnung Hyperbelfunktionen bezieht sich auf die Identität

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Diese impliziert, dass durch $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ ein Zweig einer Hyperbel parametrisiert wird.





Die Umkehrfunktionen lassen sich explizit angeben:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}), && -\infty < x < \infty \\
\operatorname{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), && 1 \leq x < \infty \\
\operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, && -1 < x < 1 \\
\operatorname{arcoth} x &= \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, && -\infty < x < -1 \vee 1 < x < \infty
\end{aligned}$$

Die Ableitungen und Stammfunktionen der Hyperbelfunktionen sind

	$\mathrm{d}/\mathrm{d}x$	$\int \ldots \, \mathrm{d}x$
cosh	$\sinh x$	$\sinh x + C$
sinh	$\cosh x$	$\cosh x + C$
tanh	$\cosh^{-2} x$	$\ln\|\cosh x\| + C$
coth	$-\sinh^{-2} x$	$\ln\|\sinh x\| + C$

Analog zu den trigonometrischen Funktionen gelten die Identiäten

$$
\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,,
\end{aligned}
$$

die sich durch Einsetzen der Definitionen verifizieren lassen.

Beweis

(i) Umkehrfunktionen:

- Sinus Hyperbolikus
  Multiplikation von $y = \sinh x = (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})/2$ mit $2\mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow$

  $$(\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0$$

  positive Lösung

  $$\mathrm{e}^x = \left[y + \sqrt{y^2+1}\right]$$

  $\leadsto \quad x = \operatorname{arsinh} y = \ln[\ldots]$

- Kosinus Hyperbolikus
  analog: $y = \cosh x = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})/2 \geq 0 \quad \Longrightarrow$

  $$(\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x + 1 = 0, \quad \mathrm{e}^x = \left[y \pm \sqrt{y^2-1}\right]$$

  Zweig mit $x \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geq 1$: $x = \operatorname{arcosh} y = \ln[\ldots + \ldots]$
  $(y \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad [\ldots + \ldots] \geq 1)$

- Tangens Hyperbolikus

$$y = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

  Erweitern des Bruches mit e^x und Auflösen nach $z = e^{2x}$ $\quad \rightsquigarrow$

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad yz + y = z - 1, \quad z = \frac{1 + y}{1 - y},$$

  und $x = \operatorname{artanh} y = (\ln z)/2$

- Kotangens Hyperbolikus
  analog:

$$y = \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{z + 1}{z - 1}, \quad z = e^{2x}$$

  und

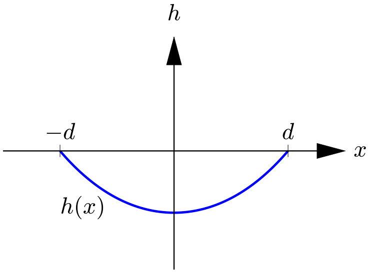
$$x = \operatorname{arcoth} y = (\ln z)/2, \quad z = \frac{y + 1}{y - 1}$$

(ii) Hyperbelgleichung:
$x = \cosh t$, $y = \sinh t$, binomische Formel $\quad \Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
x^2 - y^2 &= \left(\frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{2t} + 2 + \mathrm{e}^{-2t}}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^{2t} - 2 + \mathrm{e}^{-2t}}{2}\right) \\
&= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1
\end{aligned}
$$

Beispiel

Höhe *h* eines an den Endpunkten befestigten Kabels



physikalisches Modell $\quad\rightsquigarrow\quad$ Differentialgleichung

$$h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(h')^2}$$

separable Differentialgleichung erster Ordnung für $H(x) = h'(x)$

$$\frac{H'(x)}{\sqrt{1+H(x)^2}} = \frac{1}{a}$$

$(\mathrm{d}/\mathrm{d}H)\,\mathrm{arsinh}\, H = 1/\sqrt{1+H^2} \quad \Longrightarrow$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+H(x)^2}} \frac{\mathrm{d}H(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1+H^2}}\,\mathrm{d}H = \mathrm{arsinh}\, H + C\,,$$

d.h. Integration der Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$\mathrm{arsinh}\, H(x) + C = \int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad H(x) = \sinh(x/a - C)$$

nochmalige Integration $\rightsquigarrow$

$$h(x) = a\cosh(x/a - C) + \tilde{C}$$

Randbedingungen $h(\pm d) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad C = 0,\ \tilde{C} = -a\cosh(d/a)$, d.h.

$$h(x) = a(\cosh(x/a) - \cosh(d/a))$$