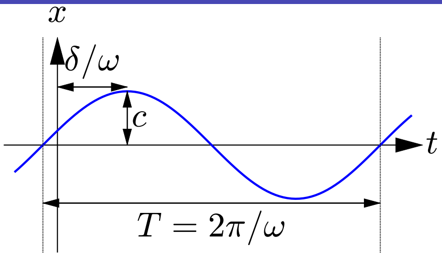
Harmonische Schwingung

Eine harmonische Schwingung mit Amplitude $c \geq 0$, Phasenverschiebung δ und Frequenz ω bzw. Periode $T = 2\pi/\omega$ hat die Form

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)\,.$$



Äquivalente Darstellungen sind

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} c\exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta)) \\ &= a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \end{aligned}$$

mit $a = c\cos\delta$, $b = c\sin\delta$, d.h. (c, δ) sind die Polarkoordinaten von (a, b):

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan\delta = b/a\,.$$

Beweis

(i) Umrechnung der Parameter:

Formel von Euler-Moivre, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i} \sin t \quad \Longrightarrow$

$$\cos(\omega t - \delta) = \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \delta)}$$

Additionstheorem $\quad \rightsquigarrow$

$$c \cos(\omega t - \delta) = c \left(\cos(\omega t) \cos \delta + \sin(\omega t) \sin \delta\right)$$

d.h. $a = c \cos \delta,\ b = c \sin \delta$

(ii) Berechnung von Amplitude und Phase:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 \cos^2 \delta + c^2 \sin^2 \delta} = \sqrt{c^2}\sqrt{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta} = c$$

und

$$\delta = \arctan(b/a) + \varphi, \quad \varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{für } a < 0 \text{ und } b < 0 \end{cases}$$

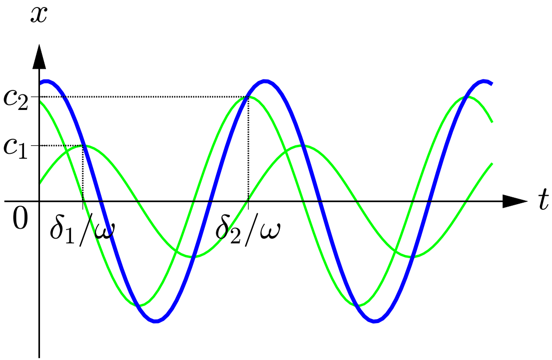
mit der Konvention $\arctan(b/0) = \operatorname{sign}(b)\, \pi/2$.

Überlagerung harmonischer Schwingungen

Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen (in der Abbildung fett gezeichnet)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2\,,$$

ist harmonisch mit Amplitude $c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2) c_1 c_2 + c_2^2}$ und Phase $\delta = \arg\left(c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_2}\right)$.



Alternativ berechnen sich Amplitude und Phase aus der Darstellung

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

gemäß

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}, \quad \tan\delta = \left(\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2}\right) ,$$

d.h. (c, δ) sind die Polarkoordinaten von $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

Beweis

(i) Komplexe Form der Überlagerung:

$$\begin{aligned} c\cos(\omega t-\delta) &= \operatorname{Re}\left(c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\delta)}\right) = \operatorname{Re}\left(c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\delta_1)}+c_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\delta_2)}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\left[c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_1}+c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_2}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \end{aligned}$$

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}=z=[\ldots]$ bzw. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta}=\bar{z} \quad \rightsquigarrow \quad \delta=\arg\bar{z}=\arg\left(c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1}+c_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_2}\right)$ und

$$c^2=|z|^2=z\bar{z}=(c_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_1}+c_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_2})(c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_1}+c_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_2})$$

Ausmultiplizieren $\rightsquigarrow$

$$c^2=c_1^2+c_1c_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_2-\delta_1)}+c_2c_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta_1-\delta_2)}+c_2^2$$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}s}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s}=2\cos s \quad \Longrightarrow \quad$ Formel für die Amplitude

(ii) Reelle Darstellung:

Anwendung der Formeln für Amplitude und Phase der harmonischen Schwingung

$$c\ \cos(\omega t-\delta)=(a_1+a_2)\cos(\omega t)+(b_1+b_2)\sin(\omega t)$$

Beispiel

Überlagerung der harmonischen Schwingungen

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\, k = 0, \ldots, n,$$

komplexe Darstellung $\quad \rightsquigarrow \quad$ Überlagerung als Realteil von

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \delta)} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - n\delta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\delta}$$

geometrische Summe mit $q = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \quad \rightsquigarrow$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{1 - \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}\right)^{n+1}}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta}}$$

$2\mathrm{i} \sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$ mit $\varphi = (n+1)\delta/2$ bzw. $\varphi = \delta/2 \quad \rightsquigarrow$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\delta}(2\mathrm{i}\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}(2\mathrm{i}\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}$$

harmonische Schwingung mit Amplitude $\sin((n+1)\delta/2)/\sin(\delta/2)$ und Phase $(n/2)\delta$

Modulierte Schwingung

Die Überlagerung zweier Schwingungen $c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t}$ lässt sich als Produkt

$$c(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta\omega t} + c_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Delta\omega t},$$

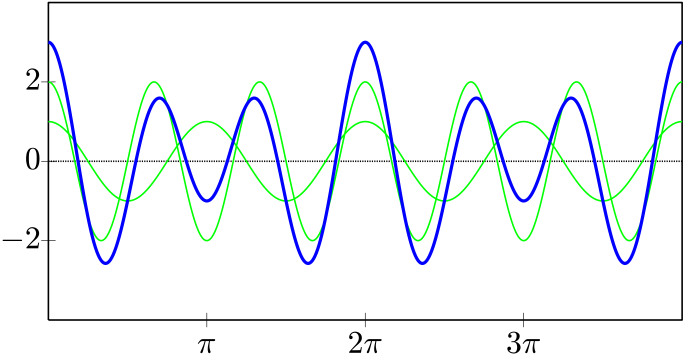
schreiben mit $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ und $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$.
Die resultierende sogenannte modulierte Schwingung ist nur dann periodisch, wenn das Frequenzverhältnis ω_1/ω_2 rational ist. Der Betrag der modulierten komplexen Amplitude schwankt zwischen dem minimalen und maximalen Wert $|c_1 - c_2|$ bzw. $c_1 + c_2$. Insbesondere ist

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\,\omega t)$$

für gleiche Amplituden $c = c_1 = c_2$. In diesem Fall gilt für den Realteil $x(t)$ der Überlagerung

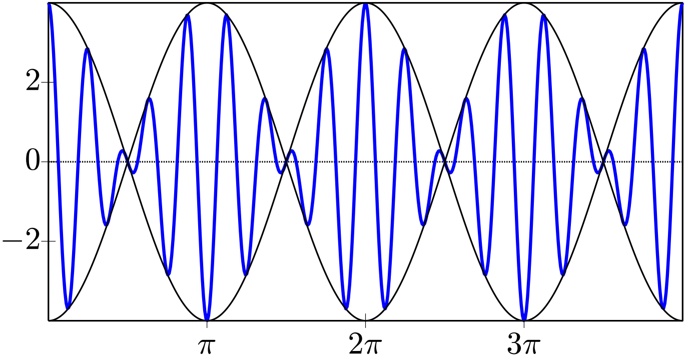
$$x(t) = c\cos(\omega_1 t) + c\cos(\omega_2 t) = 2c\,\cos(\Delta\omega\, t)\,\cos(\bar{\omega}\, t)\,.$$

- Periodische Überlagerung



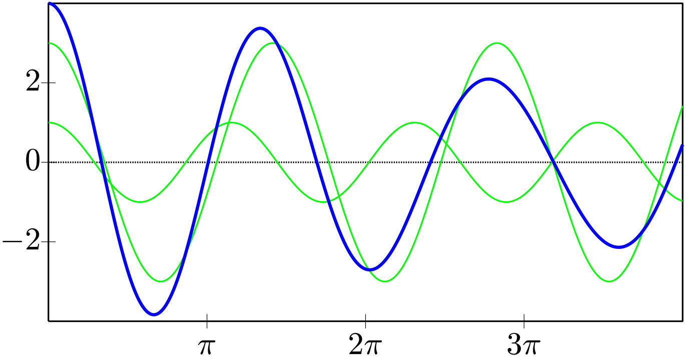
$$x(t) = \mathrm{Re}\left(2e^{3it} + e^{2it}\right)$$
$$= 2\cos(3t) + \cos(2t)$$

- Gleiche Amplituden



$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathrm{Re}\left(2e^{7it} + 2e^{9it}\right) \\
&= 2\cos(7t) + 2\cos(9t) = 4\cos(t)\cos(8t)
\end{aligned}
$$

- Aperiodische Überlagerung



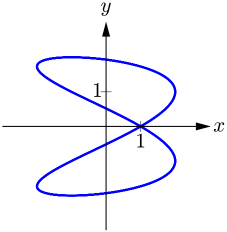
$$
\begin{aligned}
x(t) &= \mathrm{Re}\left(e^{\sqrt{3}it} + 3e^{\sqrt{2}it}\right) \\
&= \cos(\sqrt{3}t) + 3\cos(\sqrt{2}t)
\end{aligned}
$$

Beispiel

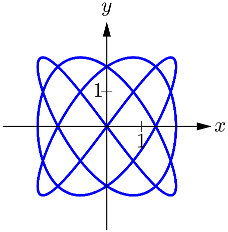
Lissajous-Figuren: Überlagerung ebener Schwingungen mit verschiedenen Schwingungsrichtungen (a_1, a_2) und (b_1, b_2):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)$$

Lissajous-Figuren für verschiedene Parameter



$a = (2, 0)$, $\omega_1 = 2$, $\delta_1 = 0$
$b = (0, 2)$, $\omega_2 = 1$, $\delta_2 = -\pi/3$



$a = (2, 0)$, $\omega_1 = 3$, $\delta_1 = 2$
$b = (0, 2)$, $\omega_2 = 4$, $\delta_2 = -1$