Häufungspunkte einer Folge

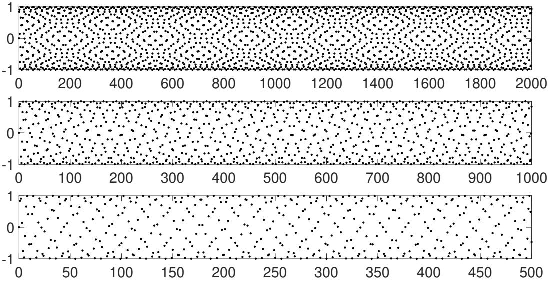
Eine Folge (a_n) hat den Häufungspunkt a, wenn jedes Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, unendlich viele Folgenelemente enthält.

Äquivalent dazu ist die Existenz einer Teilfolge, die gegen a konvergiert. Insbesondere ist ein Grenzwert einer Folge auch ein Häufungspunkt.

Beispiel

Folge

$$\sin n, \quad n = 1, 2, \ldots$$



annähernde Gleichverteilung der Folgenelemente a_n:
jeder Punkt in $[-1, 1]$ ist Häufungspunkt

Beipiel

Häufungspunkte der Folge

$$a_n = \frac{n \sin(n\pi/2)}{n + \sin(n\pi/2)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

konvergente Teilfolgen

$$\begin{aligned} b_k = & \quad a_{2k} & = \frac{0}{2k} \\ c_k = & \quad a_{4k+1} & = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1} \\ d_k = & \quad a_{4k+3} & = \frac{-(4k+3)}{(4k+3)-1} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Häufungspunkte

$$\lim b_k = 0, \quad \lim c_k = 1, \quad \lim d_k = -1$$