Grenzwert einer Reihe

Eine Summe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit unendlich vielen Summanden bezeichnet man als Reihe. Sie konvergiert gegen einen Grenzwert

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,,$$

wenn die Folge (s_n) der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

gegen s konvergiert. Existiert kein Grenzwert, so bezeichnet man die Reihe als divergent.
Der Grenzwert kann von der Reihenfolge der Summanden abhängen, bzw. braucht nach dem Umordnen nicht mehr zu existieren. Notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist, dass

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \,.$$

Beispiel

Berechnung und Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

(i) Explizite Berechnung:
Partialbruchzerlegung $\quad \rightsquigarrow$

$$a_n = \frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

Umformung der Reihe

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots$$

Grenzwert $\sum_n a_n = 3/2$ wegen Aufhebung aller Terme außer $1/1$ und $1/2$

(ii) Konvergenz:
Differenz der Partialsummen

$$
\begin{aligned}
|s_m - s_n| &= \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1} \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right| < \frac{4}{n}
\end{aligned}
$$

wegen Aufhebung der mittleren Terme
$\rightsquigarrow$ Cauchy-Konvergenz:

$$
|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > \frac{4}{\varepsilon}
$$

Differenz zum Grenzwert

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{3}{2} - s_n \right| &= \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) + \cdots \right| \\
&= \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right| < \frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

(iii) Divergenz bei Umordnung:
Reihe nach Partialbruchzerlegung

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

andere Gruppierung

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$(\ldots) \geq 2^n/(2^{n+1}-1)-1/(n+3) \geq 1/2-1/3 \quad \rightsquigarrow \quad$ Divergenz