Grenzwert einer Folge

Eine Folge

$$(a_n) = a_1, a_2, \ldots$$

konvergiert gegen einen Grenzwert a,

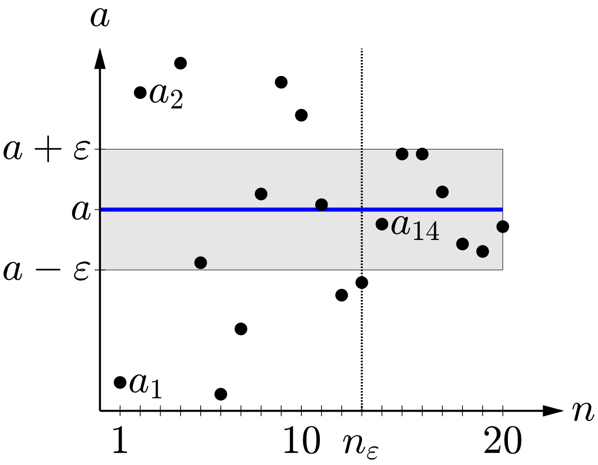
$$a = \lim_{n\to\infty} a_n\,,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

für alle $n > n_\varepsilon$.
Man benutzt ebenfalls die Schreibweise $a_n \to a$ für eine konvergente Folge.

Besitzt (a_n) keinen Grenzwert, so bezeichnet man die Folge als divergent.
In diesem Fall existiert für alle a ein $\varepsilon > 0$ mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$ für unendlich viele n.


a
$a + \varepsilon$
a
$a - \varepsilon$
a_2
a_{14}
a_1
n
1
10
n_ε
20

Beweis

Konvergenzkriterium in Quantorenschreibweise

$$\exists a \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \, \forall n > n_\varepsilon \, : \, |a - a_n| < \varepsilon$$

Negation (Vertauschung der Quantoren und Negation der Kernaussage)

$$\forall a \, \exists \varepsilon > 0 \, [\, \forall n_\varepsilon \, \exists n > n_\varepsilon \, : \, |a_n - a| \geq \varepsilon \,]$$

$$
\begin{aligned}
[\ldots] \quad &\iff \quad \text{für } n_\varepsilon = 1, 2, \ldots \text{ existiert eine Folge } (a_{n(n_\varepsilon)}) \text{ mit } |a_{n(n_\varepsilon)} - a| \geq \varepsilon \\
&\iff \quad \text{unendlich viele Folgenelemente liegen außerhalb von } (a - \varepsilon, a + \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Beispiel

Vorgehensweise zum Nachweis des Konvergenz-Kriteriums

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > n_\varepsilon$$

(i) Vereinfachung des Ausdrucks $|a_n - a|$ durch Abschätzung nach oben:

$$|a_n - a| \leq f(n)$$

mit einer möglichst einfachen Funktion f

(ii) Auflösen der Ungleichung $f(n) < \varepsilon$ nach n:

$$n > g(\varepsilon) = n_\varepsilon$$

konkretes Beispiel

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}, \quad \text{Grenzwert } a = 1$$

(i) Bestimmung einer Schranke f:

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n} = f(n)$$

(ii) Auflösen der Ungleichung $f(n) < \varepsilon$:

$$1/n < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > 1/\varepsilon = g(\varepsilon) = n_\varepsilon$$