Geometrische Reihe

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau, dann wenn $|q| < 1$.

Mit der geometrischen Summenformel

$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

lässt sich der Grenzwert explizit berechnen:

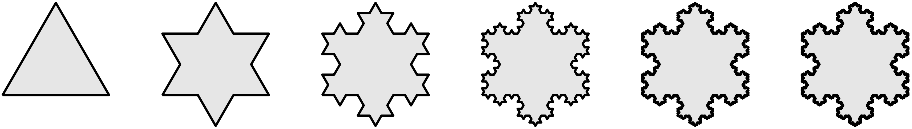
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}$$

für $|q| < 1$.

Beispiel

Koch-Schneeflocke:
fraktale Menge generiert durch iterative Modifikation von Kanten

Ersetzen von jeder Kante durch vier neue Kanten mit einem Drittel der Länge in jedem Schritt



n-te Schneeflocke: $3 \cdot 4^n$ Kanten mit Länge 3^{-n}

(i) Umfang:

$$\text{Kantenzahl} \cdot \text{Kantenlänge} = \; (3 \cdot 4^n)\,(3^{-n}) = 3\;\left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty$$

Divergenz $\quad\rightsquigarrow\quad$ fraktaler Rand

(ii) Flächeninhalt:
Fläche: Vereinigung gleichseitiger Dreiecke (Flächeninhalt $(\sqrt{3}/4)\,a^2$ bei Seitenlänge a)
n-ter Schritt: zusätzlich $3 \cdot 4^{n-1}$ gleichseitige Dreiecke mit Kantenlängen 3^{-n} und Flächeninhalten $\left(\sqrt{3}/4\right)(3^{-n})^2$
$\rightsquigarrow\quad$ Gesamtfläche nach n Schritten

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=1}^{n} \left(3 \cdot 4^{k-1} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(3^{-k}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{4^{k-1}}{9^{k-1}}\right)$$

$n \to \infty \quad\rightsquigarrow\quad$ geometrische Reihe mit Grenzwert

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (4/9)^k\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{1}{1 - 4/9}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.6928$$