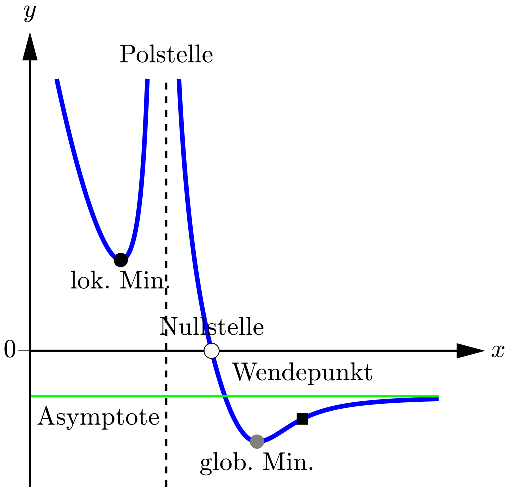
Funktionsuntersuchung

Zur Beurteilung des qualitativen Verhaltens einer Funktion können folgende Merkmale herangezogen werden:

- Symmetrien
- Periodizität
- Unstetigkeitsstellen, insbesondere Polstellen
- Nullstellen ($\rightarrow$ Vorzeichen)
- Extrema ($\rightarrow$ Monotoniebereiche)
- Wendepunkte ($\rightarrow$ Konvexitätsbereiche)
- Asymptoten

Eine entsprechende Analyse der Funktion wird als Funktionsuntersuchung bezeichnet.



y
Polstelle
lok. Min.
Nullstelle
0
x
Wendepunkt
Asymptote
glob. Min.

Beispiel

Funktionsuntersuchung der Funktion

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

(i) Symmetrie:
ungrade, da $\sin x = -\sin(-x)$
(ii) Periodizität:
Periode $2\pi \quad \rightsquigarrow \quad$ betrachte nur das Intervall $[-\pi, \pi]$
(iii) Unstetigkeitsstellen, insbesondere Polstellen:
keine
(iv) Nullstellen:
Additionstheorem $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \rightsquigarrow$

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}$$

$\Longrightarrow \quad$ Nullstellen bei 0 und $\pm\pi$

(v) Extrema:
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \rightsquigarrow$

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\,\cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x = 2\cos x\,(2\cos^2 x - 1)$$

Null für $\cos x = 0$ oder $\cos x = \pm 1/\sqrt{2} \quad \rightsquigarrow \quad$ mögliche Extrema bei

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4$$

Periodizität $\quad \rightsquigarrow \quad$ keine Randwerte zu untersuchen
Vorzeichen der zweiten Ableitung

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\,\sin x = 2\sin x\,(1 - 6\cos^2 x)$$

und Vergleich der Funktionswerte $\quad \rightsquigarrow \quad$ Typ der Extrema

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

(vi) Wendepunkte:
Umformung der zweiten Ableitung, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\sin x - 12\cos^2 x \, \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x \\ &= 2\sin x\,(6\sin^2 x - 5) \end{aligned}$$

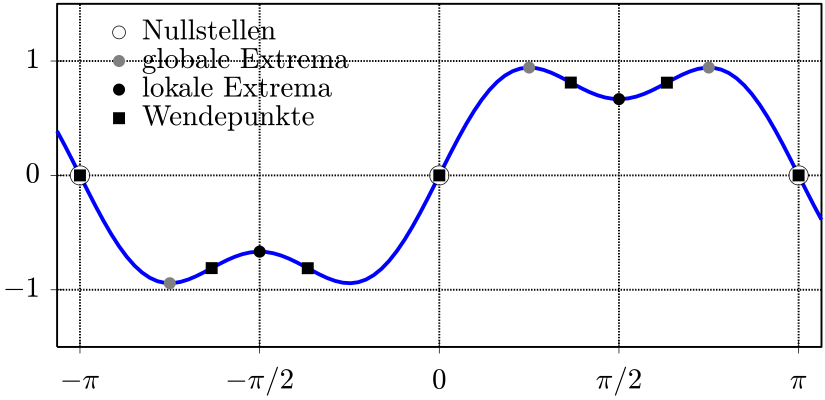
Null für $\sin x = 0$ oder $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$, d.h.

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung bzw. dritte Ableitung ungleich Null $\quad \rightsquigarrow \quad$ Wendepunkte bei

$$(0,0),\ (\pm\pi,0),\ (-1.99,-0.81),\ (-1.15,-0.81),\ (1.15,0.81),\ (1.99,0.81)$$

(vii) Asymptoten:
keine, da f periodisch und nicht konstant


Nullstellen
globale Extrema
lokale Extrema
Wendepunkte
1
0
−1
−π
−π/2
0
π/2
π

Beispiel

Funktionsuntersuchung der Funktion

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$$

(i) Symmetrie:

ungerade, da Quotient aus ungeradem Zähler und geradem Nenner

(ii) Periodizität:
nicht periodisch

(iii) Unstetigkeitsstellen, insbesondere Polstellen
einfache Polstellen bei ± 1 (Nenner Null, Zähler ungleich Null)

(iv) Nullstellen:
Zähler $x(5x^2 + 4)$ Null bei $x = 0$

(v) Extrema:
erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{(x^2-1)^2} = \frac{(x^2-4)(5x^2+1)}{(x^2-1)^2} \overset{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ mögliche Extrema bei $x = \pm 2$
einfache Pole (Vorzeichenwechsel) $\rightsquigarrow$ keine globalen Extrema
$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ und $x \to -1$
$\implies$ lokales Maximum in $(-\infty, -1)$
analoges Argument $\rightsquigarrow$ lokales Minimum in $(1, \infty)$
$\rightsquigarrow$ lokale Extrema an den beiden Nullstellen der Ableitung
lokales Maximum: $(-2, 16)$, lokales Minimum: $(2, 16)$

(vi) Wendepunkte:
zweite Ableitung

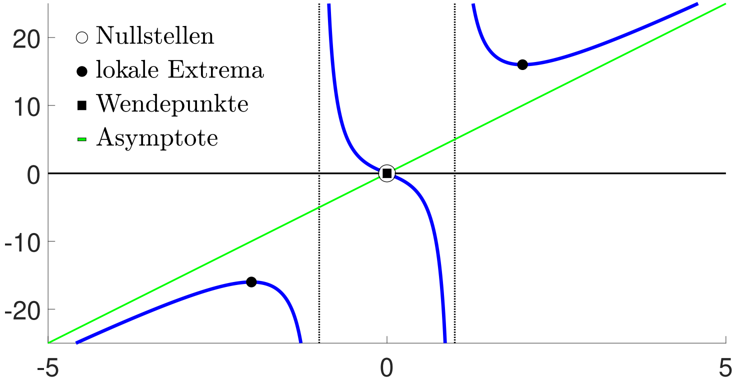
$$f''(x) = \frac{18x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \overset{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ Wendepunkt $(0, 0)$, da die zweite Ableitung das Vorzeichen wechselt bzw. die dritte Ableitung nicht Null ist

(vii) Asymptoten:
Polynomdivision $\rightsquigarrow$

$$f(x) = \frac{5x^3 - 5x + 9x}{x^2 - 1} = 5x + \frac{9x}{x^2 - 1}$$

Asymptote: $p(x) = 5x$



Beispiel

Funktionsuntersuchung der Funktion

$$f(x) = |x^2 - 1|\mathrm{e}^{-4x/3}$$

(i) Qualitatives Verhalten:
keine Symmetrien und nicht periodisch
Unstetigkeitsstellen der Ableitung (Knicke) bei $x = \pm 1$ aufgrund des Knicks der Betragsfunktion bei dem Argument 0
$\lim_{x\to\infty} x^r \exp(-sx) = 0$ für alle $r, s > 0 \quad \Longrightarrow \quad p(x) = 0$ ist Asymptote für $x \to \infty$
keine Asymptote für $x \to -\infty$, da $\lim_{x\to-\infty} |f(x)/x| = \infty$

(ii) Nullstellen:
Positivität der Exponentialfunktion $\quad \rightsquigarrow \quad$ Nullstellen bei $x_{1,2} = \pm 1$
globale Minima an diesen Punkten, da $f \geq 0$
kein globales Maximum wegen $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

(iii) Extrema:
$f(-1) = f(1) = f(\infty) = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ mindestens jeweils ein lokales Maximum in den Intervallen $(-1, 1)$ und $(1, \infty)$
Ableiten von

$$f(x) = \sigma(x^2 - 1)\mathrm{e}^{-4x/3}, \quad x \neq \pm 1\,,$$

mit $\sigma = -1$ für $x \in (-1, 1)$ und $\sigma = 1$ für $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \quad \rightsquigarrow$

$$f'(x) = \sigma \left[-4x^2/3 + 4/3 + 2x\right] \mathrm{e}^{-4x/3}$$

$[\ldots] = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ kritische Punkte $x_3 = -1/2$ und $x_4 = 2$
lokale Maxima wegen der Existenz von mindestens zwei solcher Extrema
Funktionswerte

$$y_3 = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2/3} \approx 1.4608, \quad y_4 = 3\mathrm{e}^{-8/3} \approx 0.2085$$

(iv) Wendepunkte:

$$f''(x) = \sigma \left[16x^2/9 - 16x/3 + 2/9\right] \mathrm{e}^{-4x/3}$$

Wendepunkte an den Nullstellen

$$x_5 = 3/2 - \sqrt{34}/4 \approx 0.0423, \quad x_6 = 3/2 + \sqrt{34}/4 \approx 2.9577$$

von [...], da f'' dort das Vorzeichen wechselt

Funktionswerte: $y_5 \approx 0.9435$, $y_6 \approx 0.1501$