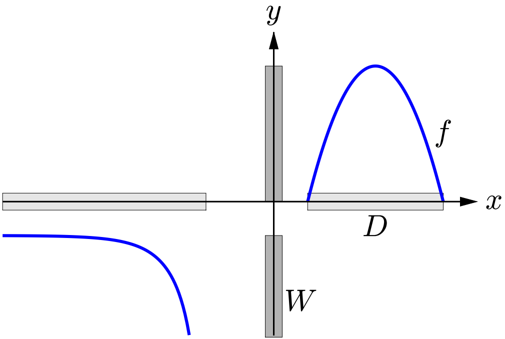
Funktion

Eine Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

ordnet jedem Argument x aus dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ einen Wert $f(x)$ aus dem Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ zu.

Der Graph von f besteht aus den Paaren (x, y) mit $y = f(x)$.
Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, sind der Definitionsbereich (hellgrau) und der Wertebereich (dunkelgrau) die Projektionen des Graphen auf die x- bzw. y-Achse.



Beispiel

Definitions- und Wertebereich der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

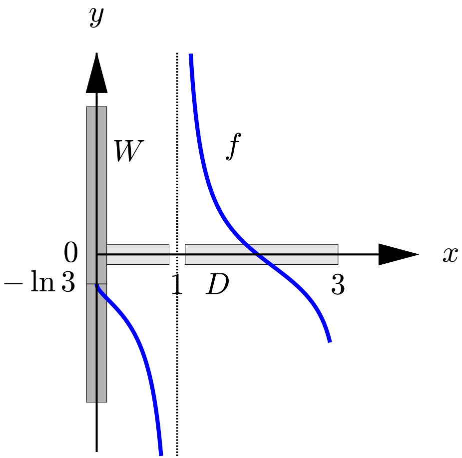
Einschränkungen an die auftretenden elementaren Funktionen:

- Argument des Logarithmus positiv, Argument der Wurzel nicht negativ $\quad\rightsquigarrow$
$$3 - x > 0, \quad x \geq 0$$
- Nenner ungleich Null $\quad\rightsquigarrow$
$$x \neq 1$$

$\rightsquigarrow$ Definitionsbereich

$$\mathrm{D} = [0,3)\backslash\{1\} = [0,1) \cup (1,3)$$

x zwischen 1 und 3 $\quad\Longrightarrow\quad$ $f(x)$ zwischen ∞ und $-\infty$
$\rightsquigarrow$ Wertebereich $W = \mathbb{R}$


y
W
f
0
x
− ln 3
1
D
3

Beispiel

Definitions- und Wertebereiche einiger elementarer Funktionen

$f(x)$	D	W
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} [0,\infty) \text{ für } n \text{ gerade;} \\ \mathbb{R} \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases}$
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\exp x$	$\mathbb{R}$	$(0,\infty)$
$\sin x$ $\cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x \,:\, x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion einer injektiven Funktion

$$f : D \ni x \mapsto y = f(x) \in W$$

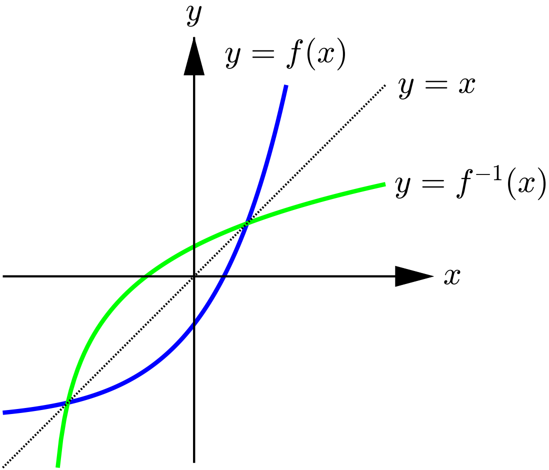
mit Definitionsbereich D und Wertebereich W ist durch

$$f^{-1} : W \to D,\ y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

definiert.

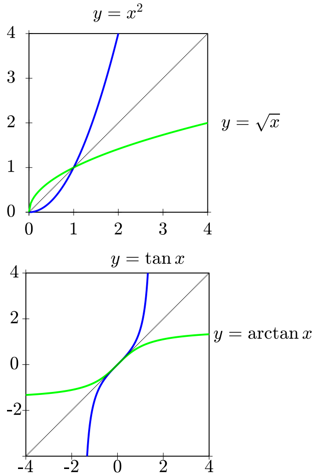
Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist der Wertebereich von f. Ihr Graph $\{(y, f^{-1}(y)) :\ y \in W\}$ ist das Spiegelbild des Graphen $\{(x, f(x)) :\ x \in D\}$ von f an der ersten Winkelhalbierenden ($y = x$).

Die Schreibweise $f^{-1}(x)$ kann leicht zu Verwechslungen mit dem Kehrwert $f(x)^{-1} = 1/f(x)$ führen. Insbesondere, wenn das Argument x der Funktion weggelassen wird, sollte aus dem Zusammenhang klar sein, was gemeint ist.


y
$y = f(x)$
$y = x$
$y = f^{-1}(x)$
x

Beispiel

Einige Umkehrfunktionen und deren Definitionsbereiche



Definitionsbereiche

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0, \infty)$
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x \,:\, x = (2z+1)\pi/2 \,, z \in \mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

Für Funktionen, die nicht injektiv sind, existieren Umkehrfunktionen nur auf Teilmengen des Definitionsbereichs. Beispielsweise ist $f : x \mapsto y = x^2$ auf $\mathbb{R}_0^+$ oder $\mathbb{R}_0^-$ invertierbar.

Rechnen mit Funktionen

Linearkombinationen von zwei Funktionen f und g sind punktweise definiert, d.h. durch die entsprechenden Operationen auf den Funktionswerten:

$$(rf + sg)(x) = rf(x) + sg(x), \quad r, s \in \mathbb{R}\,.$$

Analog erklärt man das Produkt fg und den Quotienten f/g. Beim Quotienten müssen dabei die Nullstellen von g vom Definitionsbereich ausgeschlossen werden.
Schließlich bezeichnet

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

die Hintereinanderschaltung zweier Funktionen.

Beispiel

Operationen mit den Funktionen

$$f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = x + 2$$

- Arithmetische Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} (f + 2g)(x) &= (x^2 - 4) + 2(x + 2) = x^2 + 2x \\ (fg)(x) &= (x^2 - 4)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ (f/g)(x) &= \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2, \quad x \neq -2 \end{aligned}$$

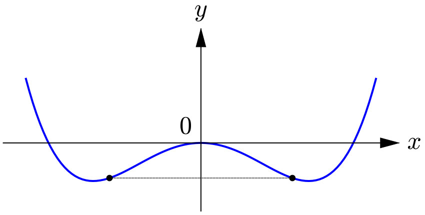
  hebbare Definitionslücke des Quotienten f/g bei $x = -2$ (Nullstelle des Zählers $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ an der Polstelle bei $x = -2$)

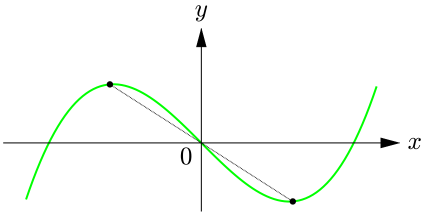
- Hintereinanderschaltung:

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= (\underbrace{x+2}_{g(x)})^2 - 4 = x^2 + 4x \\
(g \circ f)(x) &= (\underbrace{x^2-4}_{f(x)}) = x^2 - 2,
\end{aligned}
$$

($f \circ g \neq g \circ f$: $\circ$ ist nicht kommutativ)

Eine Funktion f ist gerade, wenn $f(-x) = f(x)$, d.h. wenn der Graph symmetrisch zur y-Achse ist. Für eine ungerade Funktion ist $f(-x) = -f(x)$, und der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.



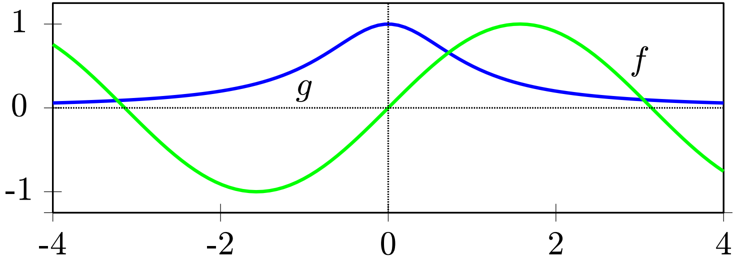


Das Produkt zweier gerader oder ungerader Funktionen ist gerade. Hingegen ist das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade. Beim Bilden von Summen oder Differenzen bleibt der Typ erhalten.

Beispiel

Kombination gerader und ungerader Funktionen, illustriert für

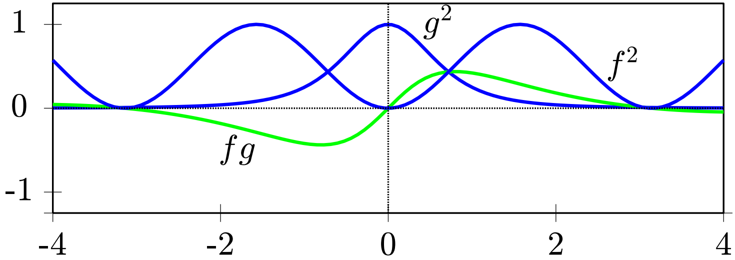
$$f(x) = \sin x$$
$$g(x) = \frac{1}{x^2+1}$$



Produkte:

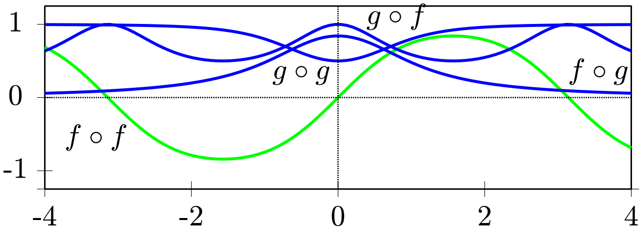
- ungerade $\times$ ungerade $\to$ gerade: $\quad f(x)f(x) = \sin^2 x$
- ungerade $\times$ gerade $\to$ ungerade: $\quad f(x)g(x) = \sin x/(x^2+1)$
- gerade $\times$ gerade $\to$ gerade: $\quad g(x)g(x) = 1/(x^2+1)^2$

Quotienten: analog



Hintereinanderschaltung:

- ungerade $\circ$ ungerade $\to$ ungerade: $f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x))$
- ungerade $\circ$ gerade $\to$ gerade: $f(g(-x)) = f(g(x))$
- gerade $\circ$ ungerade $\to$ gerade: $g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x))$
- gerade $\circ$ gerade $\to$ gerade: $g(g(-x)) = g(g(x))$



$$
\begin{aligned}
f(f(x)) &= \sin(\sin(x))\,, & f(g(x)) &= \sin((1+x^2)^{-1}) \\
g(f(x)) &= (1+\sin^2(x))^{-1}\,, & g(g(x)) &= (1+(1+x^2)^{-1})^{-1}
\end{aligned}
$$