Fehlerfortpflanzung

Bezeichnet $\Delta x = \tilde{x} - x$ den absoluten Fehler eines Messwerts oder einer Näherung $\tilde{x} \approx x$, so gilt für eine stetig differenzierbare Funktion f

$$|\Delta y| = |f'(t)||\Delta x| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

mit $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ und t zwischen x und $\tilde{x}$.

Entsprechend gilt für den relativen Fehler

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

falls $x, y \neq 0$. Der Ausdruck in Klammern wird als Konditionszahl c_r von f an der Stelle x bezeichnet.

Durch Vernachlässigung des Terms $o(\Delta x)$ lässt sich die Verstärkung des Fehlers näherungsweise abschätzen:

$$|\Delta y| \approx |f'(x)||\Delta x|, \quad \frac{|\Delta y|}{|y|} \approx c_r\,\frac{|\Delta x|}{|x|}\,.$$

Statt exakter Ableitungswerte können auch geeignete Schranken verwendet werden:

$$|\Delta y| \leq c_a |\Delta x|\,, \quad c_a \geq \max_{|t-x|\leq|\Delta x|} |f'(t)|\,.$$

Entsprechend ist $c_r = c_a \frac{|x|}{|y|}$ eine Schranke für die Verstärkung des relativen Fehlers.

Beispiel

Fehleranalyse für die Messung eines Winkels $\vartheta \in (0, \pi/2)$ aus dem Verhältnis der Katheten des Steigungsdreiecks:

$$\vartheta = \arctan(y/x)$$

Schätzung von $\Delta\vartheta$ in Abhängigkeit von Δy bei fest gewähltem x

(i) Absoluter Fehler:
Verstärkungsfaktor $c_a \geq$ Maximum von

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}y}\right| = \left|\frac{1/x}{1 + y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2 + y^2}\right|$$

maximal für $y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad c_a = 1/|x|$ und

$$|\Delta\vartheta| \leq |1/x| \; |\Delta y|$$

größere Ungenauigkeiten für kleines x

(ii) Relativer Fehler:
Verstärkungsfaktor (Konditionszahl)

$$c_r = \max_y \left| \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}y} \frac{y}{\vartheta} \right| = \max_y \left| \frac{x}{x^2+y^2} \frac{y}{\vartheta} \right|$$

$|\vartheta| \geq |\sin\vartheta|$, $\sin\vartheta = y/\sqrt{x^2+y^2} \quad \rightsquigarrow$

$$c_r = \max_y \left| \frac{x}{x^2+y^2} \frac{y}{y/\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq 1$$

keine Verstärkung des relativen Fehlers:

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \leq \frac{|\Delta y|}{|y|}$$