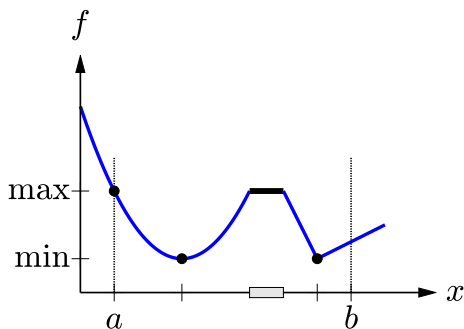


## Extrema stetiger Funktionen

Eine stetige Funktion hat auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$  mindestens ein Minimum und Maximum.



Die Extrema können sowohl am Rand als auch im Innern des Intervalls  $[a, b]$  auftreten und müssen, wie in der Abbildung ebenfalls veranschaulicht ist, nicht eindeutig sein.

## Beispiel

Beweis der Abschätzung

$$(x + y)^n \leq c(n) (x^n + y^n), \quad x, y \geq 0,$$

mit einem Stetigkeitsargument.

o.B.d.A.  $x$  und  $y$  nicht beide null

Polarkoordinaten  $\rightsquigarrow$

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad t \in D = [0, \pi/2]$$

mit  $r > 0$  und nach Division der Ungleichung durch  $r^n$  ist zu zeigen

$$(\cos t + \sin t)^n \leq c (\cos^n t + \sin^n t) \iff f(t) = \frac{(\cos t + \sin t)^n}{\cos^n t + \sin^n t} \leq c$$

mit einer nur von  $n$  abhängigen Konstante  $c = c(n)$

Kosinus und Sinus im Intervall  $D$  nicht beide null

$\implies f$  stetig  $\implies$  Existenz eines Maximums auf  $D$