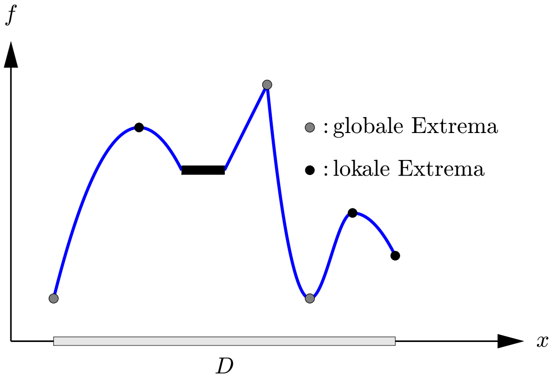
Extrema

Eine Funktion f hat in a ein globales Minimum auf einer Menge D, wenn

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D\,.$$

Bei einem lokalen Minimum ist der Funktionswert $f(a)$ nur in einer hinreichend kleinen Umgebung $(a-\delta, a+\delta) \subset D$ minimal.
Globales und lokales Maximum sind analog definiert.



Für eine stückweise stetig differenzierbare Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall können Extremwerte nur an kritischen Punkten auftreten:

- Nullstellen der Ableitung,
- Unstetigkeitsstellen der Ableitung,
- Randpunkten.

Globale Extrema lassen sich durch Vergleichen der Funktionswerte an diesen kritischen Punkten ermitteln.

Ob es sich bei einem kritischen Punkt a um ein lokales Extremum handelt, lässt sich mit Hilfe der zweiten Ableitung entscheiden. Ist f'' stetig und $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$), so handelt es sich um ein lokales Minimum (Maximum). Alternativ, oder falls $f''(a) = 0$, kann man $f(a)$ zur Typbestimmung mit zwei benachbarten Funktionswerten $f(a \pm h)$ vergleichen, wobei h kleiner als der Abstand zum nächsten kritischen Punkt gewählt wird.

Beweis

(i) Kritische Punkte:

lokales Minimum an einem inneren Punkt $a \quad \Longrightarrow$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\geq 0}}{h} \geq 0$$

und

$$f'(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\overbrace{f(a+h) - f(a)}^{\geq 0}}{h} \leq 0$$

$\Longrightarrow \quad f'(a) = 0$, d.h. an einem lokalen Extremum im Inneren des Definitionsbereichs ist entweder die Ableitung Null oder f ist dort nicht differenzierbar

$\rightsquigarrow$ verbleibende Möglichkeiten für lokale Minima:

- innere Punkte an denen f nicht differenzierbar ist
- Randpunkte

(ii) Extremwerttest:
$f''(a) > 0$, Taylor-Entwicklung $\implies$

$$f(a \pm h) = f(a) \pm \underbrace{f'(a)}_{=0} h + \underbrace{\frac{f''(t)}{2} h^2}_{R}$$

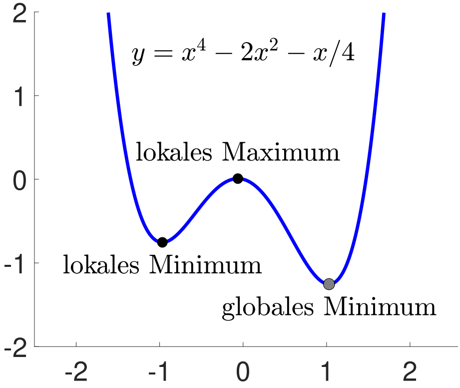
mit $t \in [a-h, a+h]$
Stetigkeit von f''
$\implies$ $R > 0$ für kleines h
$\implies$ lokales Minimum bei a

Beispiel

Verschiedene Typen lokaler und globaler Extrema

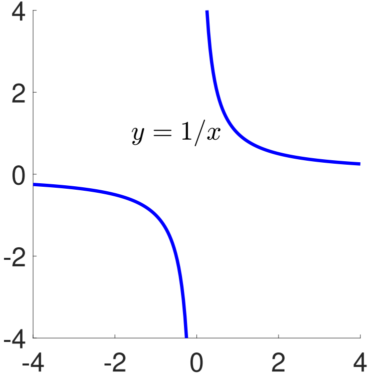
(i) $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$, $D = \mathbb{R}$:

ein lokales und ein globales Minimum
ein lokales Maximum
kein globales Maximum, da $f(x) \to \infty$ für $x \to \pm\infty$

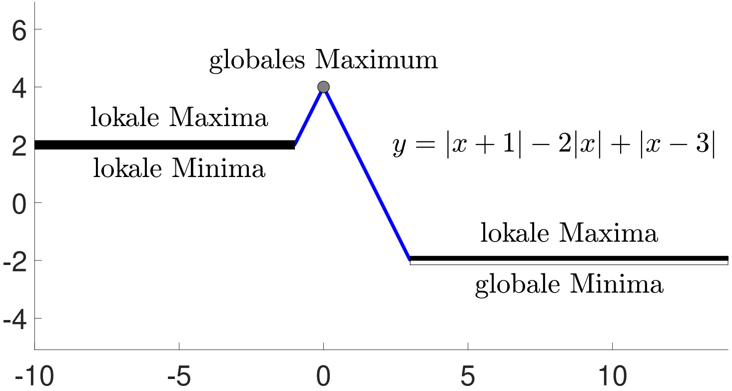


(ii) $f(x) = 1/x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
strikt monoton auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$
$\rightsquigarrow$ keine Extrema

$\inf_{x>0} f(x) = 0$ und $\sup_{x<0} f(x) = 0$ werden nicht angenommen

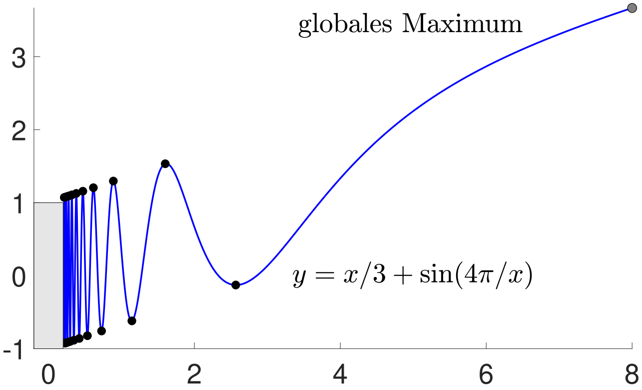


(iii) $f(x) = |x+1| - 2|x| + |x-3|$, $D = \mathbb{R}$:
stückweise lineare Funktion $\rightsquigarrow$ Extrema am Rand von Monotoniebereichen
Für Bereiche mit konstantem Wert sind alle Punkte lokale Extremstellen.



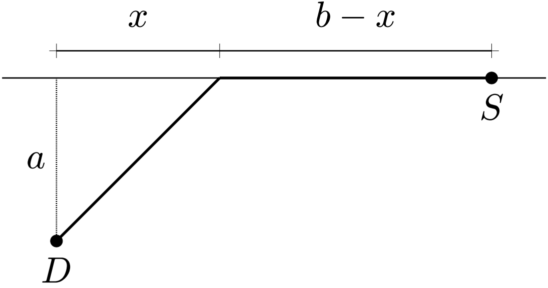
(iv) $f(x) = x/3 + \sin(4\pi/x),\ D = (0, 8]$:
unter Umständen keine Extrema bei offenem oder halboffenem Definitionsbereich
nicht hebbare Definitionslücke am Randpunkt $x = 0$
Oszillationen des Sinus $\implies$

- unendlich viele lokale Extrema
- alle Punkte in $[-1, 1]$ sind Häufungspunkte (grauer Bereich)



Beispiel

Schnellstmögliche Verbindungsstraße vom Dorf D zur Stadt S bei Durchschnittsgeschwindigkeiten $v_A = 120$ km/h auf der Autobahn und $v_N = 60$ km/h auf der Nebenstrecke



Fahrtzeit

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_N + (b - x)/v_A, \quad 0 \le x \le b$$

Nullsetzen der Ableitung,

$$t'(x) = \frac{x}{v_N \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_A} \overset{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$

$$v_A\, x = v_N \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{(v_A/v_N)}_{=2}{}^2\, x^2 = a^2 + x^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_m = \sqrt{a^2/(4-1)} = a/\sqrt{3}$$

Vergleich der Zeit mit den Zeiten an den Intervallendpunkten:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_A}, \quad t(0) = \frac{2a + b}{v_A}, \quad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_A}$$

$t(0) \ge t(x_m) \quad \rightsquigarrow \quad$ nur $t(b)$ zu betrachten

x_m optimal, für $x_m = a/\sqrt{3} \leq b$, da

$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) &\iff 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ &\iff 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ &\iff a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ minimale Zeit für

$$x = \min(x_m, b)$$

(Extremum am Rand für $x_m \geq b$)