Exponentialfunktion

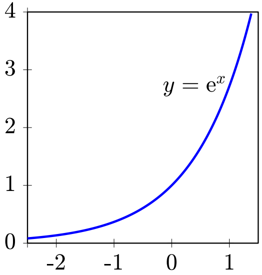
Die Potenzfunktion

$$y = \mathrm{e}^x = \exp(x)$$

mit der Eulerschen Zahl

$$\mathrm{e} = 2.71828\ldots$$

wird als Exponentialfunktion bezeichnet.



Sie besitzt folgende Eigenschaften.

- Definitions- und Wertebereich: $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_+$
- Funktionalgleichung: $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$, $1 = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x}$
- Ableitung und Stammfunktion: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x, \quad \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
- Taylor-Entwicklung: $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, absolut konvergent für $x \in \mathbb{R}$
- Produktdarstellung: $\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}(1 + x/n)^n$

Verzinsung

Wird ein Startkapital K_0 mit q Prozent verzinst, so ergibt sich nach n Zinsperioden das Endkapital

$$K_n = K_0\,(1+p)^n, \quad p = q/100\,.$$

Am gebräuchlichsten sind eine jährliche oder eine monatliche Verzinsung. Für die entsprechenden Zinsfaktoren p_J und p_M besteht bei gleichem Kapitalwachstum die Beziehung

$$1 + p_J = (1 + p_M)^{12}\,;$$

$q_J = 100 p_J$ wird als effektiver Jahreszins bezeichnet.

(i) Ratensparen:
Wird jeweils zu Beginn einer Zinsperiode ein Betrag r eingezahlt, so erhält man nach n Zinsperioden das Guthaben

$$K_n = r\,(1+p)\frac{(1+p)^n - 1}{p}\,.$$

(ii) Tilgung eines Darlehens:
Bei Tilgung eines Darlehens K_0 mit einer jeweils zum Ende einer Zinsperiode gezahlten Rate r ist die Restdarlehenssumme nach n Zinsperioden

$$K_n = K_0\,(1+p)^n - r\,\frac{(1+p)^n - 1}{p}\,.$$

Für eine vollständige Tilgung ($K_n = 0$) ist die Rate

$$r_\star = K_0\,(1+p)^n \frac{p}{(1+p)^n - 1}$$

erforderlich.
Die Formel für K_n beschreibt ebenfalls das Restkapital bei Zahlungen einer Rente r (jeweils zum Ende einer Zinsperiode) aus einem verzinsten Grundkapital K_0. In diesem Fall ist $r_\star$ die Rente, die über einen Zeitraum von n Zinsperioden maximal gezahlt werden kann.

Beweis

(i) Verzinsung eines Sparguthabens:

Zinsen pro Zinsperiode: $K\,(q/100) = K\,p$

$\rightsquigarrow$ Wachstum mit Faktor $(1+p)$ pro Zinsperiode, d.h. mit Faktor $(1+p)^n$ nach n Zinsperioden

$$K_0 \;\to\; K_n = K_0\,(1+p)^n$$

Umrechnung von monatlicher auf jährliche Verzinsung

$$K_0\,(1+p_M)^{12} \stackrel{!}{=} K_0\,(1+p_J)$$

$\rightsquigarrow$ Formel für den effektiven Jahreszins

(ii) Ratensparen:
erste Rate, verzinst über n Zinsperioden
$\rightsquigarrow$ Beitrag von $r\,(1+p)^n$ zum Endkapital
zweite Rate $\rightsquigarrow$ Beitrag $r\,(1+p)^{n-1}$

...

n-te Rate $\rightsquigarrow$ Beitrag $r\,(1+p)$
Bilden der Summe $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} K_n &= r\,\big((1+p)^n + (1+p)^{n-1} + \cdots + (1+p)\big) \\ &= r\,(1+p)\,\big((1+p)^{n-1} + (1+p)^{n-2} + \cdots + 1\big) \\ &= r\,(1+p)\sum_{k=0}^{n-1}(1+p)^k \end{aligned}$$

Formel für eine geometrische Summe $\rightsquigarrow$

$$K_n = r\,(1+p)\,\frac{(1+p)^n - 1}{p}$$

wie behauptet

(iii) Tilgung eines Darlehens:
Beweis der Formel für die Restdarlehenssumme K_n nach n Zinsperioden mit vollständiger Induktion

- Induktionsanfang $n = 1$: Verzinsung mit Faktor $(1 + p)$ und Zahlung der Tilgungsrate r am Ende der Zinsperiode $\leadsto$
$$K_1 = K_0 \,(1 + p) - r \quad \checkmark$$
- Induktionsschluss $n - 1 \to n$: Iduktionsvoraussetzung (IV)
$$K_{n-1} = K_0 \,(1 + p)^{n-1} + r \,\frac{(1 + p)^{n-1} - 1}{p}$$
Verzinsung von K_{n-1} und Zahlung einer weiteren Rate r $\leadsto$
$$\begin{aligned} K_n &= K_{n-1} \,(1 + p) - r \\ &\underset{(\mathrm{IV})}{=} \left(K_0 \,(1 + p)^{n-1} + r \,\frac{(1 + p)^{n-1} - 1}{p} \right) (1 + p) - r \\ &= K_0 \,(1 + p)^n + r \left[\frac{(1 + p)^n - (1 + p)}{p} - 1 \right] \end{aligned}$$
Umformung
$$[\ldots] = \frac{(1 + p)^n - 1}{p}$$
$\leadsto$ behauptete Formel für K_n

Beispiel

Zinsanalyse des Verkaufs von Manhattan (11000 Morgen für 60 Gulden) im Jahr 1626:

jährlicher Zinssatz von 7 Prozent $\rightsquigarrow$ Guthaben im Jahr 2000 von

$$60\,\mathrm{NLG} \cdot (1.07)^{374} = 5.857 \cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG} \quad (\widehat{=}\, 2.658 \cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

monatliche Verzinsung:

$$60\,\mathrm{NLG} \cdot (1 + 7/1200)^{4488} = 13.030 \cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG} \quad (\widehat{=}\, 5.913 \cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

kontinuierliche Verzinsung $((1 + p/n)^n \;\rightarrow\; \exp(p))$

$$60\,\mathrm{NLG} \cdot \exp(0.07 \cdot 374) = 14.060 \cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG} \quad (\widehat{=}\, 6.380 \cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

Fläche von Manhattan: ca. 89 Quadratkilometer
bei Wohnungspreis von 6500 USD/Quadratmeter ausreichend Kapital für ein Wohnhaus mit 4 Stockwerken über der Gesamtfläche

Beispiel

Analyse verschiedener Darlehen in Abhängigkeit von Zins und Laufzeit

(i) Ratenberechnung:
Betrag $K_0 = 200000$ EUR, Festzins 5% $\widehat{=}$ $p_J = 5/100$, Laufzeit $n = 30$ Jahre,
monatlicher Zinssatz: $p_M = (1 + p_J)^{1/12} - 1 = 0.04074 \widehat{=} 4.074\%$
monatliche Rate

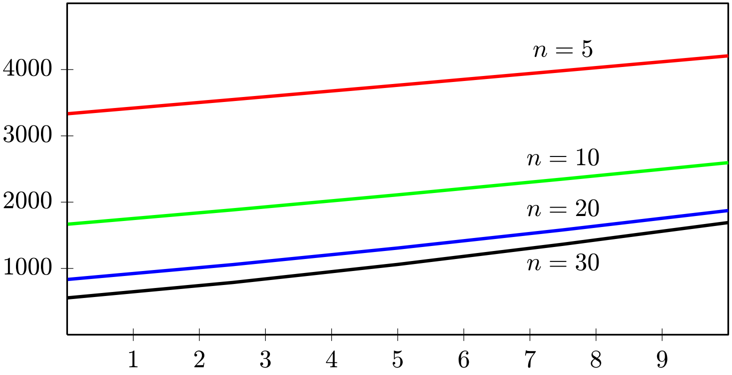
$$r_\star = K_0 \, \frac{p_M(1 + p_J)^n}{(1 + p_J)^n - 1} = 1060.11\,\text{EUR}$$

Berechnung durch Nullsetzen des Darlehensrestbetrages K_{12n} in der Verzinsungsformel und Ersetzen von $(1 + p_M)^{12}$ durch $1 + p_J$

$$0 \overset{!}{=} K_{12n} = K_0 \, (1 + p_M)^{12n} \, - \, r \, \frac{(1 + p_M)^{12n} - 1}{p_M}$$

Die Gesamtzahlung $30 \cdot 12 r_\star = 381639.60$ EUR ist um 90.8% höher als die Darlehenssumme.

monatliche Rate für ein Darlehen von $K_0 = 200000$ EUR EUR als Funktion des Zinssatzes ($0 \ldots 10$ Prozent) für verschiedene Laufzeiten n



Ratensparen und Rentenzahlungen

(i) Ratensparen:
Sparrate $r = 100$ Euro jeweils zum Monatsanfang,
effektiver Jahreszins von 4% ($p_J = 4/100$),
Zeitraum von $n = 45$ Jahren (Dauer der Berufstätigkeit)
$\leadsto$ Endkapital nach $12n$ Monaten

$$\begin{aligned} K &= r\,(1+p_M)\,\frac{(1+p_M)^{12n}-1}{p_M} \\ &= 100\,(1+0.003273)\,\frac{(1+0.003273)^{540}-1}{0.003273} \\ &= 148363\,\mathrm{EUR} \end{aligned}$$

mit

$$p_M = (1+p_J)^{1/12} - 1 = 0.003273$$

dem umgerechneten monatlichen Zinsfaktor

(ii) Monatliche Rente aus angespartem Kapital:
Zahlungszeitraum $m = 20$ Jahre (vom Rentenbeginn mit 65 Jahren bis zum durchschnittlichen Lebensalter von 85 Jahren),
Auszahlungen jeweils am Monatsbeginn,
gleichbleibende Verzinsung
$\rightsquigarrow$ monatliche Rente

$$\begin{aligned} R &= K\,(1+p_M)^{12m-1}\,\frac{p_M}{(1+p_M)^{12m}-1} \\ &= 148363\,(1+0.003273)^{239}\,\frac{0.003273}{(1+0.003273)^{240}-1} \\ &= 890\,\mathrm{EUR} \end{aligned}$$

Verhältnis der Rente zur Sparrate

$$R : r = 890 : 100 = 8.9$$

(sehr große Steigerung aufgrund des Zinseszinseffekts)

Begründung

Restkapital nach Zahlung der ersten Rente:

$K - R$

Restkapital, verzinst für ein Jahr, nach Zahlung der zweiten Rente:

$(K - R)(1 + p_M) - R = Kq - Rq - R, \quad q = 1 + p_M$

...

Restkapital nach Zahlung der letzten Rente zu Beginn des $12m$-ten Monats:

$$Kq^{12m-1} - Rq^{12m-1} - Rq^{12m-2} - \cdots - R = Kq^{12m-1} - R\,\frac{q^{12m} - 1}{p_M}$$

Nullsetzen $\quad\rightsquigarrow\quad$ Ausdruck für R

Formel für das Verhältnis von Rente zu Sparrate

$$\frac{R}{r} = \underbrace{q\,\frac{q^{12n} - 1}{p_M}}_{K/r}\,\underbrace{q^{12m-1}\,\frac{p_M}{q^{12m} - 1}}_{R/K} = q^{12m}\,\frac{q^{12n} - 1}{q^{12m} - 1}$$

mit $q = 1 + p_M$

Darstellung von R/r in Abhängig von der Anzahl n der Jahre des Ansparzeitraums für $m = 20$ Auszahlungsjahre und für verschiedene Zinssätze