Eulersche Zahl

Die Eulersche Zahl

$$\mathrm{e} = 2.71828182845905\ldots$$

lässt sich als Grenzwert einer Folge und einer Reihe darstellen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,.$$

Beweis

(i) Konvergenz der Reihe:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \leq \frac{1}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2} = 2^{1-n}$$

$\Longrightarrow$ Majorisierung durch eine geometrische Reihe

$\Longrightarrow$ Existenz des Grenzwerts

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

(ii) Obere Abschätzung für die Folge:

Für $n \geq k \geq 0$ gilt

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!}$$

binomische Formel $\Longrightarrow$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \mathrm{e}$$

Grenzwertbildung $\quad \rightsquigarrow \quad \limsup_{n\to\infty} a_n \le \mathrm{e}$

(iii) Untere Abschätzung für die Folge:

Für $n > N$ mit N beliebig aber fest gewählt gilt

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \ge \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \ge \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(\frac{n-N}{n}\right)^N$$

Grenzwertbildung $\quad \rightsquigarrow$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \ge \liminf_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{N}{n}\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

$N \to \infty$: rechte Seite $\to \mathrm{e}$, d.h. $\liminf_{n\to\infty} a_n \ge \mathrm{e}$

(iv) Kombination der Abschätzungen:

bereits gezeigt

$$\underline{\lim}\, a_n \ge \mathrm{e}, \quad \mathrm{e} \ge \overline{\lim}\, a_n$$

Wegen $\underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n$ folgt

$$\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$$

und damit $a_n \to \mathrm{e}$.