Division von Taylor-Reihen

Der Quotient zweier Taylor-Reihen

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-a)^k \,/\, \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

kann durch Koeffizientenvergleich aus der Identität

$$(\underbrace{q_0 + q_1 u + \cdots}_{q(x)})(g_0 + g_1 u + \cdots) = f_0 + f_1 u + \cdots, \quad u = x - a,$$

bestimmt werden:

$$\begin{array}{rcccccl} q_0 g_0 & = & f_0 & \Longrightarrow & q_0 & = & f_0/g_0 \\ q_0 g_1 + q_1 g_0 & = & f_1 & \Longrightarrow & q_1 & = & (f_1 - q_0 g_1)/g_0 \\ & & & \ldots, & & & \end{array}$$

d.h. $q_n = (f_n - q_0 g_n - \cdots - q_{n-1} g_1)/g_0$.

Beispiel

Taylor-Entwicklung des Tangens

Ansatz

$$\underbrace{(q_1 x + q_3 x^3 + q_5 x^5 + \ldots)}_{\tan x}\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right)}_{\cos x} = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots}_{\sin x}$$

$(q_0 = q_2 = \cdots = 0$, da $\tan x$ ungerade)
Koeffizientenvergleich für die Monome x, x^3 und x^5 $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
q_1 &= 1, \\
-\frac{q_1}{2} + q_3 &= -\frac{1}{6} \quad \Longrightarrow \quad q_3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\
\frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2} + q_5 &= \frac{1}{120} \quad \Longrightarrow \quad q_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$