Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

Eine Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

kann gliedweise differenziert und integriert werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} (x-a)^k \\ \int f(x)\,\mathrm{d}x &= c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k} (x-a)^k . \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius bleibt bei beiden Operationen unverändert.

Beispiel

Taylor-Reihe des Arkussinus

Binomial-Reihe

$$(1+t)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} t^k = 1 + st + \frac{s(s-1)}{2!} t^2 + \cdots$$

$t = -x^2$, $s = -1/2 \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} x^{2k} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots \end{aligned}$$

wegen

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)\cdot(-3/2)\cdots(-(2k-1)/2)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

gliedweise Integration unter Berücksichtigung von

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\arcsin x = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

explizite Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

Beispiel

näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_0^x \exp(-t^2)\,dt$$

gliedweise Integration der Taylor-Reihe

$$\exp(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\int_0^x \exp(-t^2)\,dt &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{k!\,(2k+1)}\right]_0^x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!\,(2k+1)}\end{aligned}$$

(Werte an unterer Grenze null)

numerische Näherungen für $x = 1$

```
k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
```