

Funktion

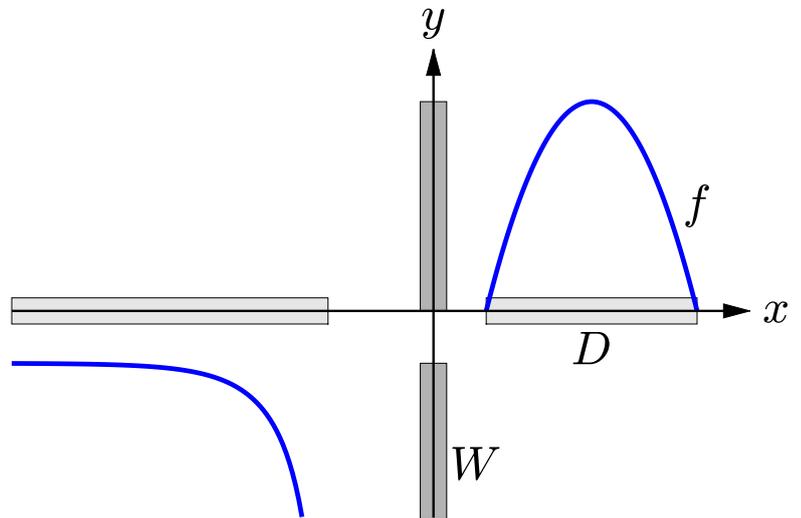
Eine Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

ordnet jedem Argument x aus dem Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ einen Wert $f(x)$ aus dem Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ zu.

Der Graph von f besteht aus den Paaren (x, y) mit $y = f(x)$.

Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, sind der Definitionsbereich (hellgrau) und der Wertebereich (dunkelgrau) die Projektionen des Graphen auf die x - bzw. y -Achse.



1 / 367

Beispiel

Definitions- und Wertebereich der Funktion

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

Einschränkungen an die auftretenden elementaren Funktionen:

- Argument des Logarithmus positiv, Argument der Wurzel nicht negativ \rightsquigarrow

$$3 - x > 0, \quad x \geq 0$$

- Nenner ungleich Null \rightsquigarrow

$$x \neq 1$$

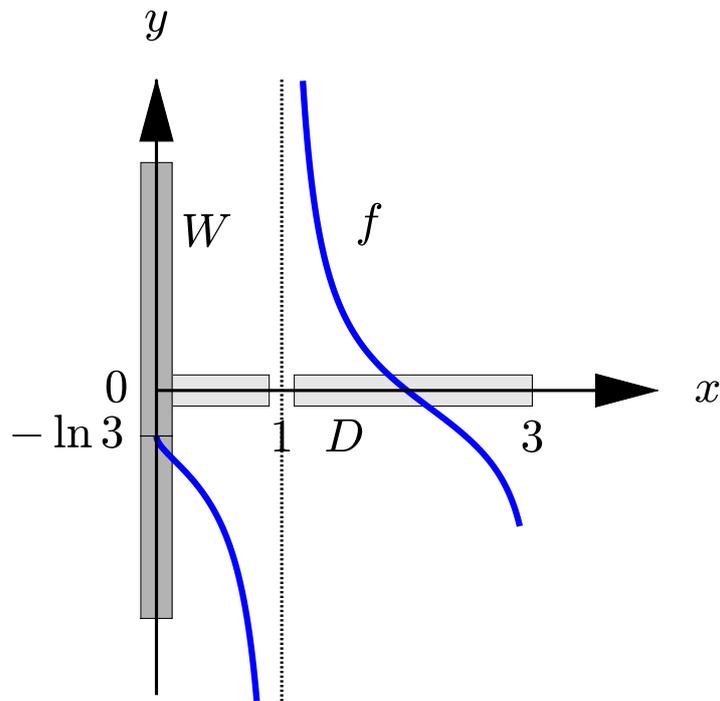
\rightsquigarrow Definitionsbereich

$$D = [0, 3) \setminus \{1\} = [0, 1) \cup (1, 3)$$

x zwischen 1 und 3 \implies $f(x)$ zwischen ∞ und $-\infty$

\rightsquigarrow Wertebereich $W = \mathbb{R}$

2 / 367



Beispiel

Definitions- und Wertebereiche einiger elementarer Funktionen

$f(x)$	D	W
$x^n, n \in \mathbb{N}$	\mathbb{R}	$\begin{cases} [0, \infty) \text{ für } n \text{ gerade;} \\ \mathbb{R} \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases}$
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\exp x$	\mathbb{R}	$(0, \infty)$
$\sin x$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$
$\cos x$	\mathbb{R}	$[-1, 1]$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	\mathbb{R}
\sqrt{x}	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

Umkehrfunktion

Die Umkehrfunktion einer injektiven Funktion

$$f : D \ni x \mapsto y = f(x) \in W$$

mit Definitionsbereich D und Wertebereich W ist durch

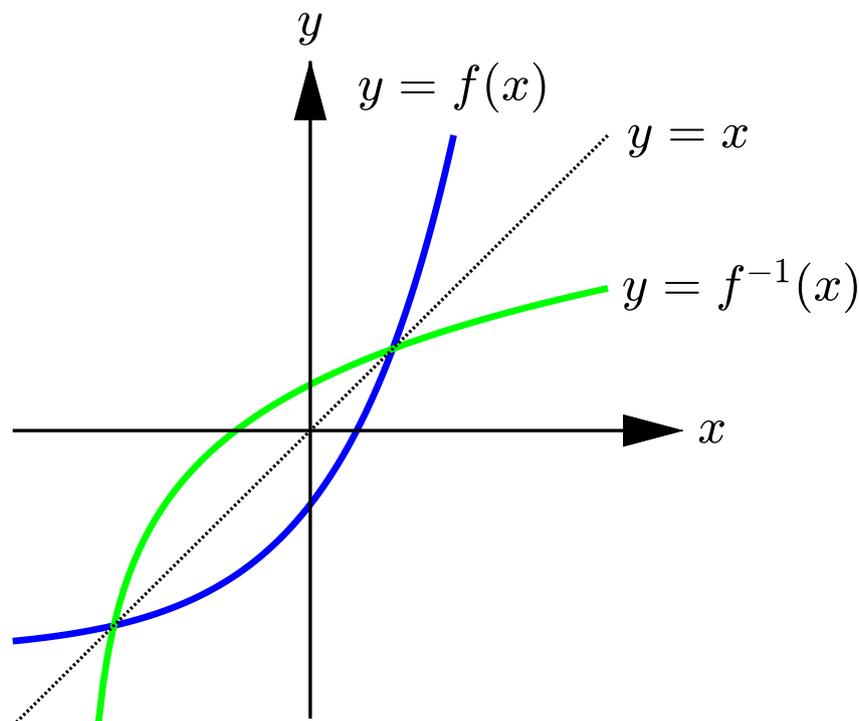
$$f^{-1} : W \rightarrow D, y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

definiert.

Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion ist der Wertebereich von f . Ihr Graph $\{(y, f^{-1}(y)) : y \in W\}$ ist das Spiegelbild des Graphen $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ von f an der ersten Winkelhalbierenden ($y = x$).

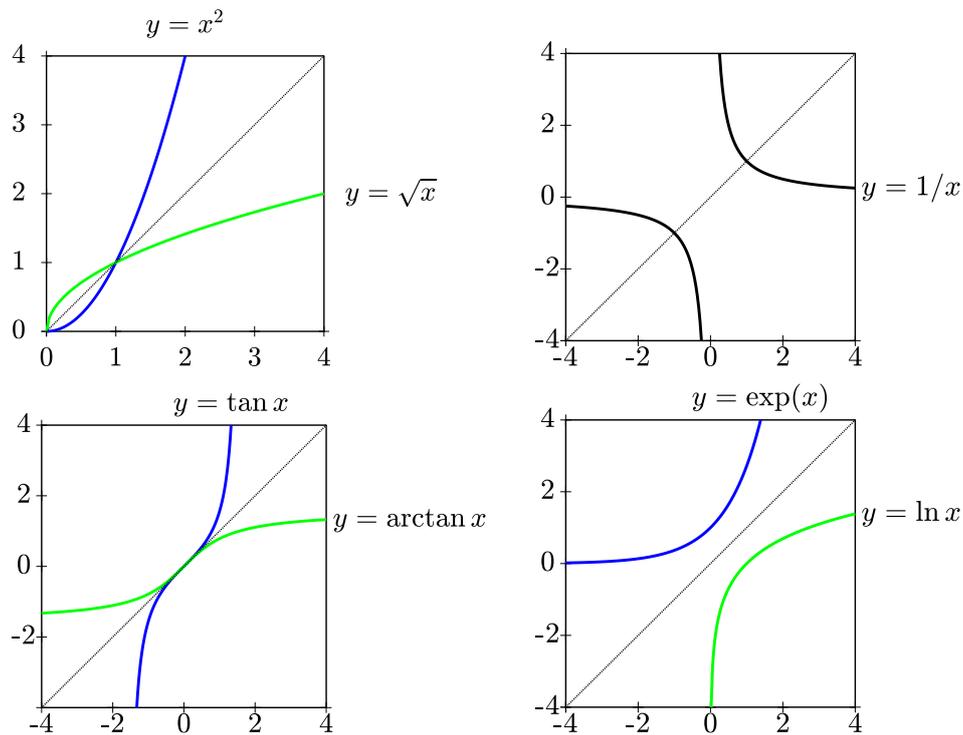
Die Schreibweise $f^{-1}(x)$ kann leicht zu Verwechslungen mit dem Kehrwert $f(x)^{-1} = 1/f(x)$ führen. Insbesondere, wenn das Argument x der Funktion weggelassen wird, sollte aus dem Zusammenhang klar sein, was gemeint ist.

5 / 367



6 / 367

Einige Umkehrfunktionen und deren Definitionsbereiche



Definitionsbereiche

f	D	f^{-1}	D
x^2	\mathbb{R}	\sqrt{x}	$[0, \infty)$
e^x	\mathbb{R}	$\ln(x)$	$(0, \infty)$
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2z + 1)\pi/2, z \in \mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	\mathbb{R}

Für Funktionen, die nicht injektiv sind, existieren Umkehrfunktionen nur auf Teilmengen des Definitionsbereichs. Beispielsweise ist $f : x \mapsto y = x^2$ auf \mathbb{R}_0^+ oder \mathbb{R}_0^- invertierbar.

Linearkombinationen von zwei Funktionen f und g sind punktweise definiert, d.h. durch die entsprechenden Operationen auf den Funktionswerten:

$$(rf + sg)(x) = rf(x) + sg(x), \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Analog erklärt man das Produkt fg und den Quotienten f/g . Beim Quotienten müssen dabei die Nullstellen von g vom Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

Schließlich bezeichnet

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

die Hintereinanderschaltung zweier Funktionen.

Beispiel

Operationen mit den Funktionen

$$f(x) = x^2 - 4, \quad g(x) = x + 2$$

- Arithmetische Verknüpfungen:

$$\begin{aligned}(f + 2g)(x) &= (x^2 - 4) + 2(x + 2) = x^2 + 2x \\(fg)(x) &= (x^2 - 4)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\(f/g)(x) &= \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2, \quad x \neq -2\end{aligned}$$

hebbare Definitionslücke des Quotienten f/g bei $x = -2$
(Nullstelle des Zählers $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ an der Polstelle bei $x = -2$)

- Hintereinanderschaltung:

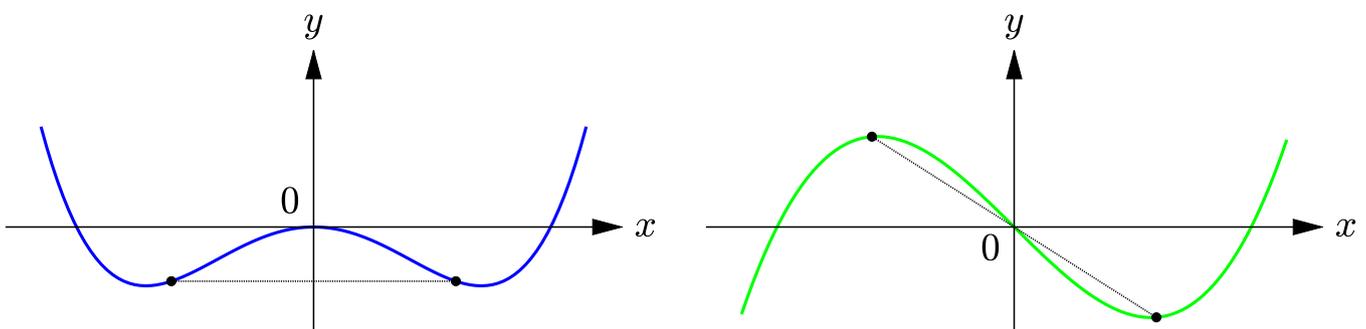
$$(f \circ g)(x) = \underbrace{(x+2)^2}_{g(x)} - 4 = x^2 + 4x$$

$$(g \circ f)(x) = \underbrace{(x^2 - 4)}_{f(x)} = x^2 - 2,$$

$(f \circ g \neq g \circ f$: \circ ist nicht kommutativ)

Gerade und ungerade Funktionen

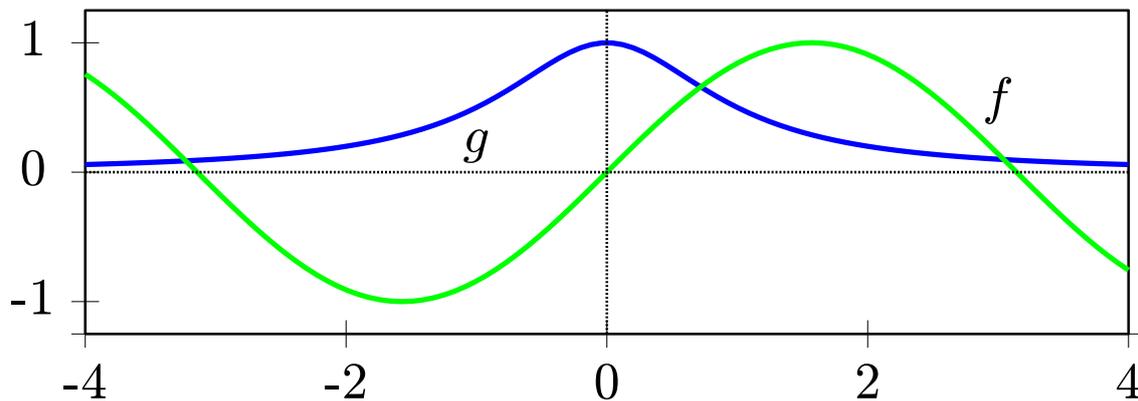
Eine Funktion f ist gerade, wenn $f(-x) = f(x)$, d.h. wenn der Graph symmetrisch zur y -Achse ist. Für eine ungerade Funktion ist $f(-x) = -f(x)$, und der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung.



Das Produkt zweier gerader oder ungerader Funktionen ist gerade. Hingegen ist das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ungerade. Beim Bilden von Summen oder Differenzen bleibt der Typ erhalten.

Kombination gerader und ungerader Funktionen, illustriert für

$$f(x) = \sin x$$
$$g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

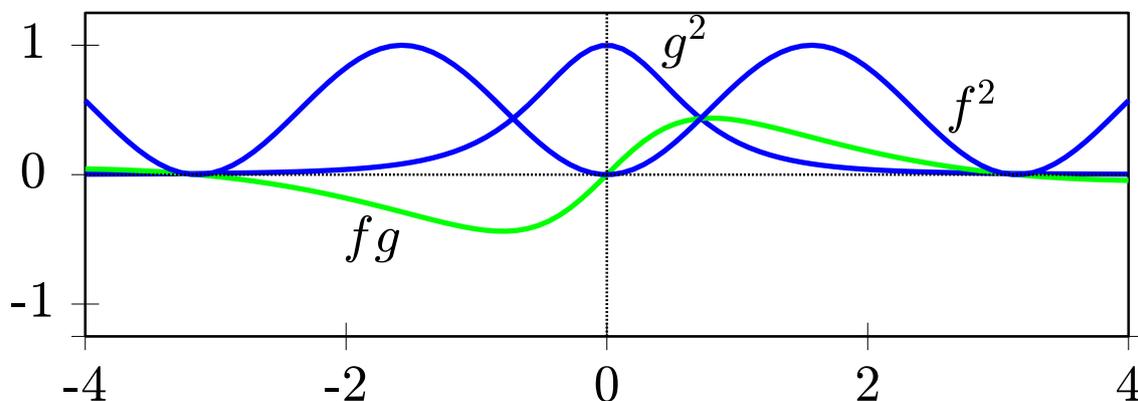


13 / 367

Produkte:

- ungerade \times ungerade \rightarrow gerade: $f(x)f(x) = \sin^2 x$
- ungerade \times gerade \rightarrow ungerade: $f(x)g(x) = \sin x/(x^2 + 1)$
- gerade \times gerade \rightarrow gerade: $g(x)g(x) = 1/(x^2 + 1)^2$

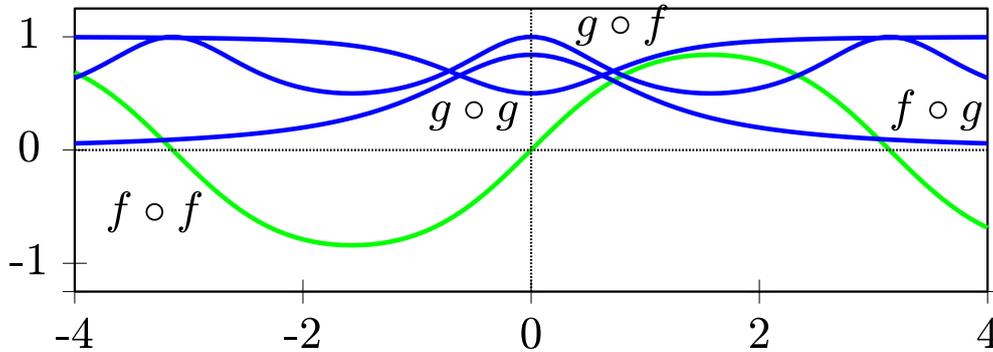
Quotienten: analog



14 / 367

Hintereinanderschaltung:

- ungerade \circ ungerade \rightarrow ungerade: $f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x))$
- ungerade \circ gerade \rightarrow gerade: $f(g(-x)) = f(g(x))$
- gerade \circ ungerade \rightarrow gerade: $g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(f(x))$
- gerade \circ gerade \rightarrow gerade: $g(g(-x)) = g(g(x))$



$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \sin(\sin(x)), & f(g(x)) &= \sin((1+x^2)^{-1}) \\ g(f(x)) &= (1+\sin^2(x))^{-1}, & g(g(x)) &= (1+(1+x^2)^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

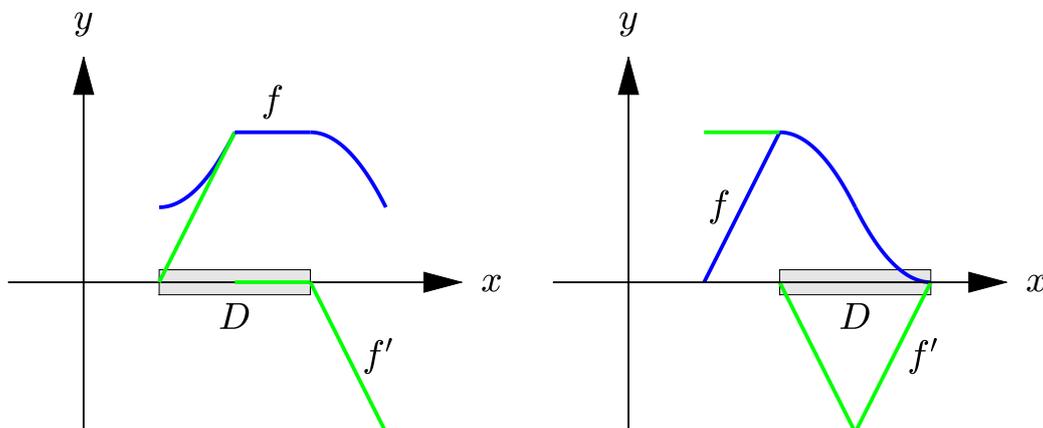
15 / 367

Monotone Funktion

Eine Funktion f ist auf einem Intervall D (strikt) monoton wachsend, wenn

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \stackrel{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

bzw., falls f stückweise stetig differenzierbar ist, wenn $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) > 0$) für alle $x \in D$ bis auf isolierte Punkte.



monoton wachsend

strikt monoton fallend

Analog definiert man (strikt) monoton fallend.

16 / 367

Beispiel

Monotoniebereiche der Funktion

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}$$

Nullstellen von $f'(x) = x^2 - 2x$

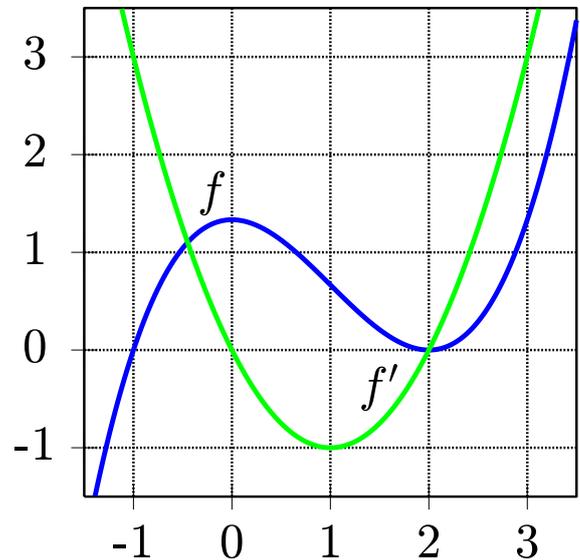
$$x = 0, \quad x = 2$$

$f'(x) > 0$ für $x < 0$ und $x > 2$

$\rightsquigarrow f$ strikt monoton wachsend auf $(-\infty, 0]$ und $[2, \infty)$

$f'(x) < 0$ für $0 < x < 2$

$\rightsquigarrow f$ strikt monoton fallend auf $[0, 2]$



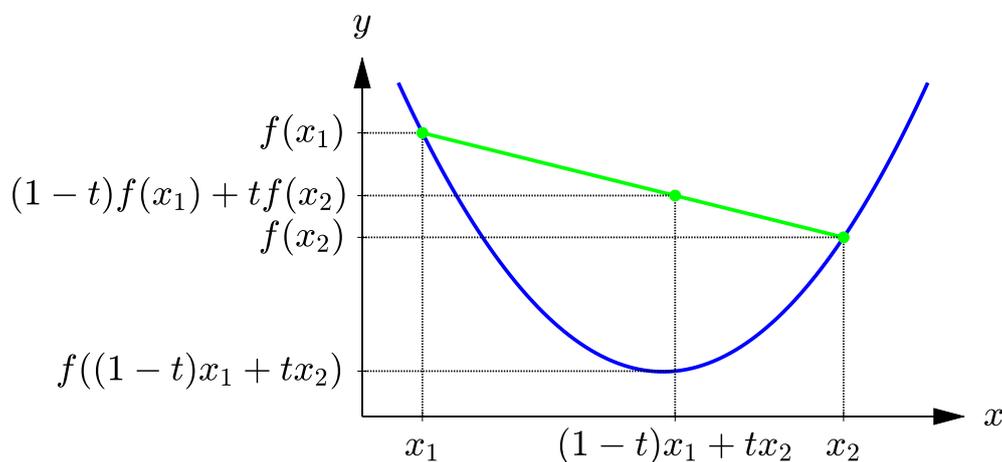
17 / 367

Konvexe und konkave Funktionen

Eine Funktion f ist (strikt) konvex auf einem Intervall D , wenn jede Sekante (echt) oberhalb ihres Graphen liegt, d.h.

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \stackrel{(<)}{\leq} (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad t \in (0, 1)$$

für alle $x_i \in D$.



18 / 367

Ist f zweimal stückweise stetig differenzierbar, so ist (strikte) Konvexität äquivalent zu

$$f''(x) \stackrel{(>)}{\geq} 0$$

für alle $x \in D$ bis auf isolierte Punkte.

Die Summe konvexer Funktionen ist konvex. Die Operationen $-$, \cdot , $/$ sowie die Hintereinanderschaltung \circ erhalten die Konvexität im allgemeinen nicht. Schließlich ist jede konvexe Funktion stetig.

Analog definiert man konkav. Für eine konkave Funktion f liegen die Sekanten unterhalb ihres Graphen, d.h. die an der x -Achse gespiegelte Funktion $-f$ ist konvex.

Beweis

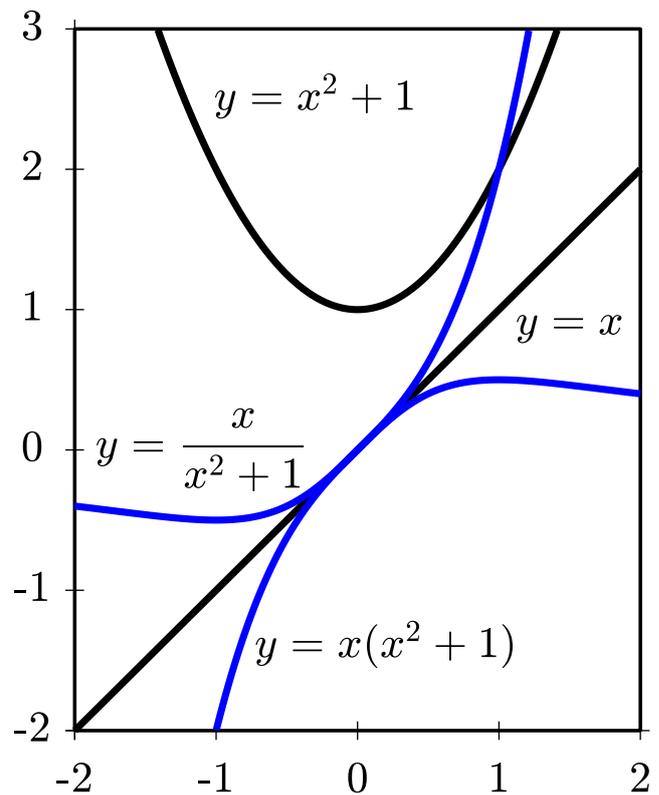
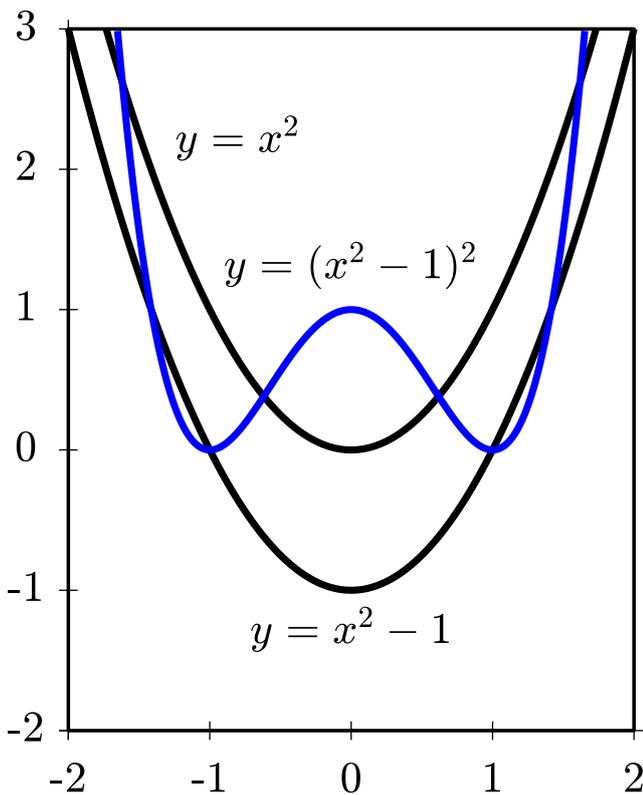
(i) Konvexität der Summe:

f, g konvex \implies

$$\begin{aligned} & (f + g)((1 - t)x_1 + tx_2) \\ &= f((1 - t)x_1 + tx_2) + g((1 - t)x_1 + tx_2) \\ &\leq (1 - t)f(x_1) + tf(x_2) + (1 - t)g(x_1) + tg(x_2) \\ &= (1 - t)(f + g)(x_1) + t(f + g)(x_2) \end{aligned}$$

(ii) Andere Verknüpfungen:

i.a. nicht konvexitätserhaltend



21 / 367

(iii) Stetigkeit einer konvexen Funktion:

betrachte einen Punkt a mit $c < a < x < b$, d.h.

$$x = ta + (1 - t)b, \quad a = sx + (1 - s)c$$

mit $0 < s, t < 1$

Konvexität von $f \implies$

$$f(x) - f(a) \leq (1 - t)(f(b) - f(a))$$

$$f(a) - f(x) \leq \left(\frac{s-1}{s}\right)(f(a) - f(c))$$

nach Umformung der Ungleichungen $f(x) \leq tf(a) + (1 - t)f(b)$ und

$$f(a) \leq sf(x) + (1 - s)f(c)$$

$r \leq p \wedge -r \leq q \implies |r| \leq \max(|p|, |q|)$ und folglich

$$|f(x) - f(a)| \leq \max(|1 - t|, |1 - 1/s|) d, \quad d = \max(|f(b) - f(a)|, |f(a) - f(c)|)$$

$x \rightarrow a \implies s, t \rightarrow 1$ und somit

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$$

analoge Argumentation für $x < a$

22 / 367

Polynom

Ein Polynom p vom Grad n ist eine Linearkombination von Monomen $x \mapsto x^k$:

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

mit $a_n \neq 0$.

Die Variable x und die Koeffizienten a_k können reell oder komplex sein. Entsprechend spricht man von einem reellen bzw. komplexen Polynom.

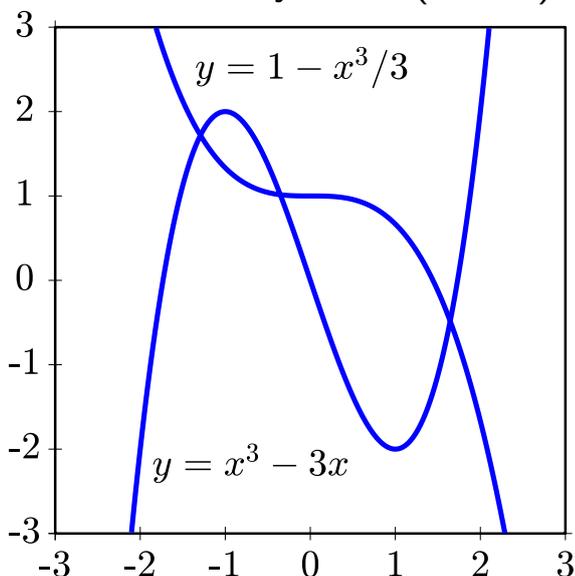
Die Polynome vom Grad $\leq n$ bilden einen Vektorraum der Dimension $n + 1$.

23 / 367

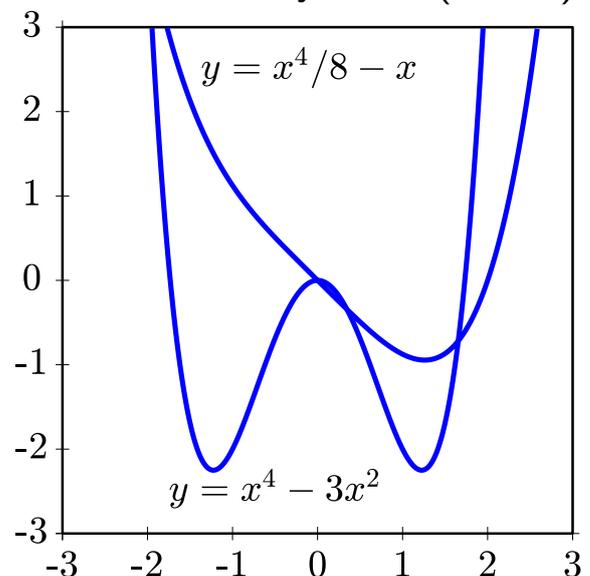
Beispiel

Polynome niedrigen Grades mit qualitativ verschiedenen Funktionsgraphen

Kubische Polynome ($n = 3$)



Quartische Polynome ($n = 4$)

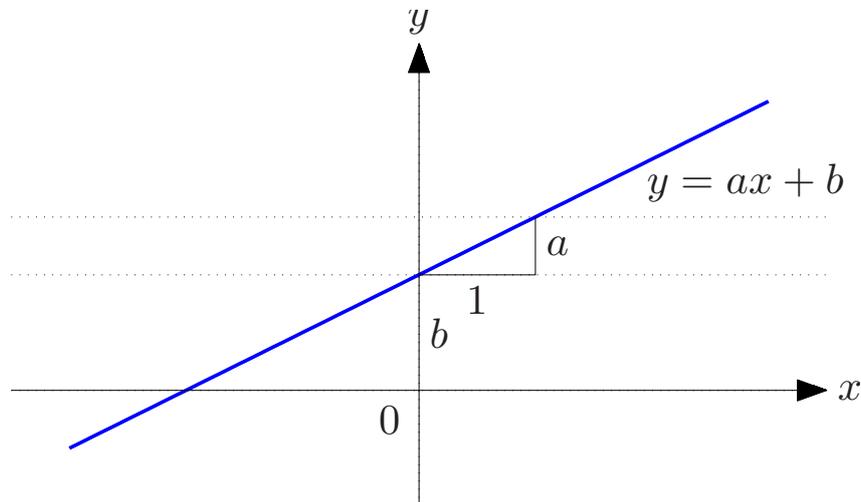


24 / 367

Der Graph einer linearen Funktion

$$f(x) = ax + b$$

ist eine Gerade mit Steigung $a = \Delta y / \Delta x = f(1) - f(0)$ und y -Achsenabschnitt $b = f(0)$.



Alternative Darstellungen sind die Punkt-Steigungs-Form

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

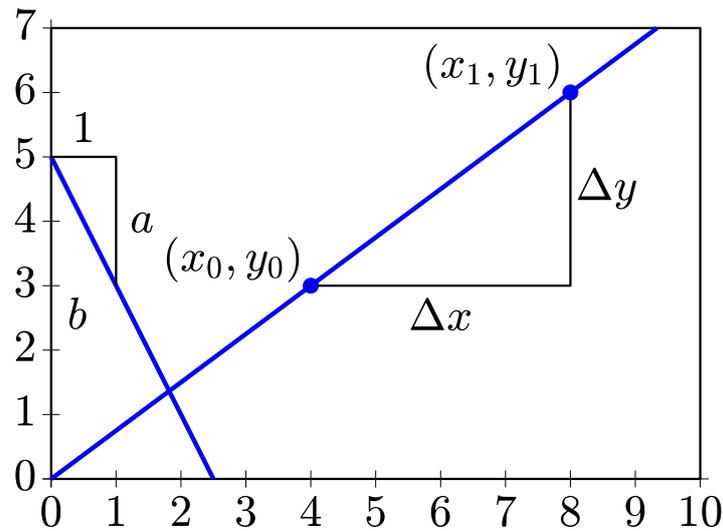
und die Zwei-Punkte-Form

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

wobei (x_0, y_0) und (x_1, y_1) Punkte auf der Geraden sind.

Beispiel

Unterschiedliche Darstellungsformen linearer Funktionen



Linke Gerade: $a = -2$, $b = 5 \rightsquigarrow y = -2x + 5$

Rechte Gerade: $(x_0, y_0) = (4, 3)$, $(x_1, y_1) = (8, 6) \rightsquigarrow \frac{y - 3}{x - 4} = \frac{6 - 3}{8 - 4}$

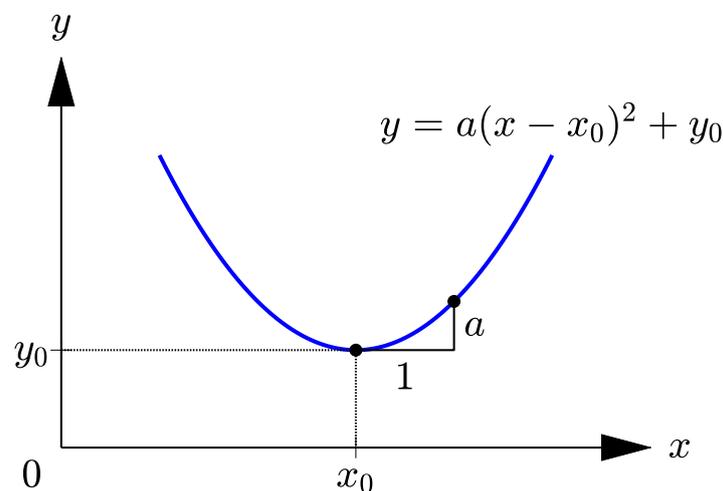
27 / 367

Quadratische Funktion

Der Graph einer quadratischen Funktion

$$\begin{aligned}x \mapsto y = f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x - x_0)^2 + y_0\end{aligned}$$

ist eine Parabel mit Scheitel $(x_0, y_0) = (-b/(2a), -b^2/(4a) + c)$.



28 / 367

Beweis

Umformung von

$$y = ax^2 + bx + c$$

durch quadratische Ergänzung \rightsquigarrow

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c,$$

d.h.

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

mit

$$x_0 = b/(2a), \quad y_0 = -b^2/(4a) + c$$

29 / 367

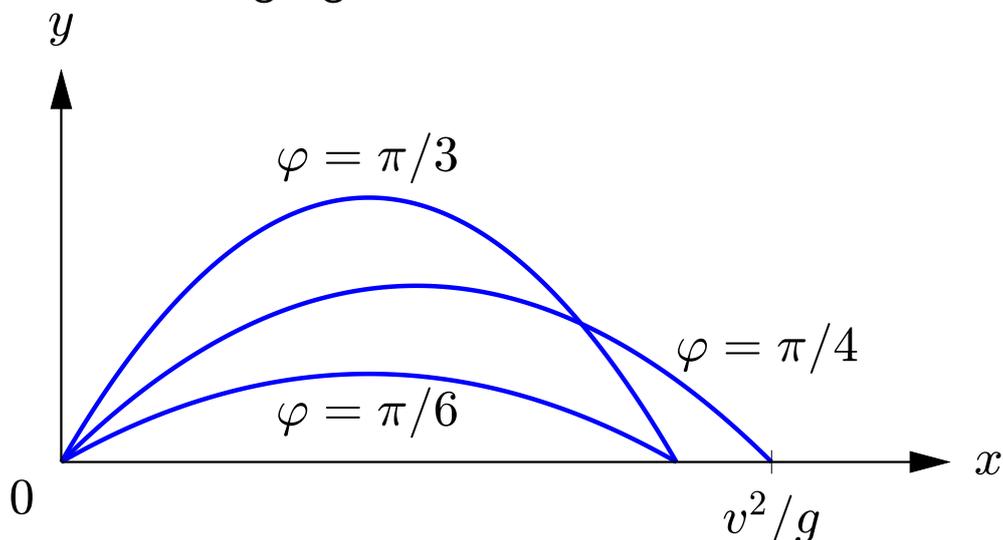
Beispiel

Schräger Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit v und Wurfrichtung $(\cos \varphi, \sin \varphi)$

parabelförmige Flugbahn:

$$y = x \tan \varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \varphi} x^2$$

mit g der Erdbeschleunigung



30 / 367

Herleitung durch Überlagerung der gleichförmigen Bewegung mit Geschwindigkeit v und der beschleunigten Bewegung des freien Falls:

$$\begin{aligned}x(t) &= vt \cos \varphi \\y(t) &= vt \sin \varphi - \frac{1}{2} gt^2\end{aligned}$$

Auflösen von $x(t)$ nach t ,

$$t = \frac{x(t)}{v \cos \varphi},$$

und Substitution in y -Komponente \rightsquigarrow

$$y(x) = \frac{vx \sin \varphi}{v \cos \varphi} - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \varphi} = x \left(\tan \varphi - \frac{gx}{2v^2 \cos^2 \varphi} \right)$$

Wurfweite: $y(x) = 0 \rightsquigarrow (\dots) = 0$ und nach Auflösen nach x

$$x = \frac{2v^2 \cos^2 \varphi}{g} \tan \varphi = \frac{v^2}{g} (2 \cos \varphi \sin \varphi) = \frac{v^2}{g} \sin(2\varphi)$$

maximal für $\varphi = \pi/4 \hat{=} 45^\circ$

Polynomdivision

Zu Polynomen p und q mit $m = \text{Grad } q \leq \text{Grad } p = n$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome f und r mit

$$p = fq + r, \quad \text{Grad } f = n - m, \quad \text{Grad } r < m.$$

Diese Zerlegung kann durch Division mit Rest bestimmt werden, analog zur schriftlichen Division natürlicher Zahlen.

Ist q ein Linearfaktor, d.h. $q(x) = x - t$, so ist $\text{Grad } f = n - 1$ und $r(x) = r_0 = p(t)$, insbesondere $r(x) = 0$ für eine Nullstelle t von p .

Die Koeffizienten f_k von $f(x) = f_{n-1}x^{n-1} + \dots + f_0$ können in diesem Spezialfall mit dem Horner-Schema aus den Koeffizienten p_k von $p(x) = p_nx^n + \dots + p_0$ berechnet werden:

$$\begin{aligned}f_{n-1} &= p_n \\f_{k-1} &= tf_k + p_k, \quad k = n - 1, \dots, 1 \\r_0 &= tf_0 + p_0\end{aligned}$$

Diese Rekursion läßt sich mit Hilfe des Tableaus

	p_n	p_{n-1}	\cdots	p_1	p_0
$\nearrow *t$		tf_{n-1}	\cdots	tf_1	tf_0
$+$	f_{n-1}	f_{n-2}	\cdots	f_0	r_0

durchführen. Man addiert die sukzessive berechneten Produkte der zweiten Zeile zu den Koeffizienten von p in der ersten Zeile. Da $r_0 = p(t)$, ermöglicht das Horner-Schema die Auswertung eines Polynoms vom Grad n in $2n$ Operationen.

Beweis

(i) Division von p durch q :

$$\underbrace{p_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{p_n}{q_m} x^{n-m} \underbrace{(q_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + \tilde{p}(x)$$

mit Rest $\tilde{p}(x) = \tilde{p}_{n-1} x^{n-1} + \cdots$

erneute Division, falls $m \leq n - 1$:

$$\tilde{p}(x) = \frac{\tilde{p}_{n-1}}{q_m} x^{n-1-m} q(x) + \tilde{\tilde{p}}(x)$$

überspringe den Schritt, falls $\tilde{p}_{n-1} = 0$, d.h. setze $\tilde{\tilde{p}} = \tilde{p}$

Abbruch, wenn der Grad des Restpolynoms kleiner als m ist, d.h.

spätestens nach $n - m + 1$ Schritten

sukzessives Einsetzen der Produkte \rightsquigarrow

$$f(x) = \frac{p_n}{q_m} x^{n-m} + \frac{\tilde{p}_{n-1}}{q_m} x^{n-1-m} + \cdots$$

(ii) Division durch einen Linearfaktor:

$$q(x) = x - t \quad \implies$$

$$p(x) = (f_{n-1}x^{n-1} + \dots + f_0)(x - t) + r_0$$

$$x = t \quad \implies \quad p(t) = f(t) \cdot 0 + r_0, \text{ d.h. } r_0 = p(t)$$

(iii) Horner-Schema:

$$q(x) = x - t \quad \implies$$

$$p_n x^n + \dots + p_0 = (f_{n-1}x^{n-1} + \dots + f_0)(x - t) + r_0$$

Koeffizientenvergleich \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} x^n : \quad & p_n = f_{n-1} \\ x^{n-1} : \quad & p_{n-1} = f_{n-2} - t f_{n-1} \\ & \dots \\ x^1 : \quad & p_1 = f_0 - t f_1 \\ x^0 : \quad & p_0 = r_0 - t f_0 \end{aligned}$$

Auflösen nach $f_{n-2}, \dots, f_0, r_0 \rightsquigarrow$ Rekursion des Horner-Schemas

Beispiel

Division der Polynome

$$\begin{aligned} p(x) &= 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \\ q(x) &= 3x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

verfahren analog zur schriftlichen Division

$$\begin{aligned} (9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) &= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)} \\ -(9x^5 + 6x^4 + 3x^3) & \\ \hline & 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\ -(6x^4 + 4x^3 + 2x^2) & \\ \hline & 3x^3 + 2x^2 + 4x \\ -(3x^3 + 2x^2 + x) & \\ \hline & 3x + 2 = r(x) \end{aligned}$$

- Schritt 1:
 Division der Terme höchsten Grades von p und $q \rightsquigarrow$
 $9x^5/3x^2 = 3x^3$
 Subtraktion des Produktes $3x^3q(x) = 9x^5 + 6x^4 + 3x^3$ von $p \rightsquigarrow$
 Rest $\tilde{p}(x) = 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 + \dots$
- Schritt 2:
 Division der Terme höchsten Grades von \tilde{p} und $q \rightsquigarrow$
 $6x^4/3x^2 = 2x^2$
 Subtraktion des Produktes $2x^2q(x) = 6x^4 + 4x^3 + 2x^2$ von $\tilde{p} \rightsquigarrow$
 Rest $\tilde{\tilde{p}}(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + \dots$
- ...

Abbruch, wenn der Grad des Restes kleiner als Grad $q = 3$ ist; in diesem Beispiel Abbruch mit dem Rest

$$r(x) = 3x + 2$$

\rightsquigarrow Zerlegung:

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)} \underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)}$$

Beispiel

Horner-Schema für

$$p(x) = 3x^3 - 2x^2 - 7x - 2$$

und verschiedene Linearfaktoren $q(x) = x - t$

Polynomdivision \rightsquigarrow

$$p(x) = (f_2x^2 + f_1x + f_0)(x - t) + r_0$$

mit $r_0 = p(t)$

Berechnung von f_k und r_0 mit dem Tableau

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ \nearrow *t & & tf_2 & tf_1 & tf_0 \\ + & f_2 = 3 & f_1 & f_0 & r_0 \end{array}$$

des Horner-Schemas, bei dem in der ersten Zeile die Koeffizienten von p und in der dritten Zeile der Startwert $f_2 = 3$ bereits eingetragen sind

39 / 367

(i) $t = 3$:

Einsetzen von $t = 3$ \rightsquigarrow

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ \nearrow *3 & & 9 & 21 & 42 \\ + & 3 & 7 & 14 & 40 \end{array}$$

\rightsquigarrow Zerlegung

$$3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 = (3x^2 + 7x + 14)(x - 3) + 40$$

und $p(3) = 40$

(ii) $t = 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & -7 & -2 \\ \nearrow *2 & & 6 & 8 & 2 \\ + & 3 & 4 & 1 & r_0 = 0 \end{array}$$

\rightsquigarrow Faktorisierung

$$3x^3 - 2x^2 - 7x - 2 = (3x^2 + 4x + 1)(x - 2)$$

kein Rest, da $t = 2$ eine Nullstelle von p ist

40 / 367

Nullstellen und Faktorisierung eines Polynoms

Ein Polynom p vom Grad n besitzt, einschließlich Vielfachheiten, genau n komplexe Nullstellen z_k und lässt sich somit als Produkt der entsprechenden Linearfaktoren schreiben:

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

mit einer Konstanten c , dem Koeffizienten von z^n .

Ist p reell, so treten komplexe Nullstellen in komplex konjugierten Paaren $x_k \pm iy_k$ auf. Eine reelle Faktorisierung kann also neben reellen Linearfaktoren auch quadratische Faktoren der Form

$$(z - x_k - iy_k)(z - x_k + iy_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

enthalten.

41 / 367

Die Nullstellen eines quadratischen Polynoms,

$$p(z) = cz^2 + bz + a,$$

lassen sich explizit angeben:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}.$$

Für Grad drei und vier erhält man mit den Cardanischen Formeln ebenfalls explizite algebraische Ausdrücke. Für höhere Grade müssen im Allgemeinen numerische Verfahren verwendet werden. Ist jedoch eine Nullstelle bekannt, so kann man durch den entsprechenden Linearfaktor dividieren,

$$q(z) = p(z)/(z - z_1),$$

und z_2, \dots, z_n als Nullstellen des Polynoms q vom Grad $n - 1$ bestimmen.

42 / 367

Beweis

(i) Faktorisierung:

Fundamentalsatz der Algebra

\implies Existenz einer (komplexen) Nullstelle z_1

Division durch den Linearfaktor $(z - z_1)$ und rekursive Anwendung des Satzes \rightsquigarrow Faktorisierung

(ii) Polynom mit reellen Koeffizienten:

$p_k \in \mathbb{R} \implies$

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^n p_k z^k} = \sum_{k=0}^n p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^n p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

\rightsquigarrow Paare komplex konjugierter Nullstellen, denn

$$p(z) = 0 \implies p(\overline{z}) = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0$$

Beispiel

Faktorisierung des kubischen Polynoms

$$p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$$

ausgehend von der bekannten Nullstelle $z_1 = 1$

Division durch den Linearfaktor $(z - 1)$ zur Nullstelle $z_1 = 1$

$$\begin{array}{r} (z^3 - 5z^2 + 9z - 5) : (z - 1) = z^2 - 4z + 5 \\ \underline{z^3 - z^2} \\ -4z^2 + 9z \\ \underline{-4z^2 + 4z} \\ 5z - 5 \\ \underline{5z - 5} \\ 0 \end{array}$$

$\rightsquigarrow p(z) = (z - 1)q(z)$ mit dem quadratischen Polynom

$$q(z) = z^2 - 4z + 5$$

Nullstellen von $q \rightsquigarrow$ restliche zwei Nullstellen von p

$$z_{2,3} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$$

- Komplexe Faktorisierung:

$$p(z) = (z - 1)(z - 2 - i)(z - 2 + i)$$

- Reelle Faktorisierung:
Zusammenfassen der komplex konjugierten Faktoren,

$$(z - 2 - i)(z - 2 + i) = (z - 2)^2 + 1,$$

\rightsquigarrow

$$p(z) = (z - 1)(z^2 - 4z + 5)$$

Beispiel

Faktorisierung des kubischen Polynoms

$$p(x) = 2x^3 - 7x - 2$$

ausgehend von einer ganzzahligen Nullstelle x_0

sukzessives Einsetzen von $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \rightsquigarrow$

$$p(0) = -2, p(1) = -7, p(-1) = 3, p(2) = 16 - 14 - 2 = 0,$$

d.h. $x_0 = 2$

Bestimmung der Koeffizienten q_k des Quotienten

$$q_2x^2 + q_1x + q_0 = (2x^3 - 7x - 2)/(x - 2)$$

mit dem Tableau des Horner-Schemas

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -7 & -2 \\ \hline \nearrow *2 & & tq_2 & tq_1 & tq_0 \\ + & q_2 = 2 & q_1 & q_0 & \text{Rest } 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -7 & -2 \\ \hline \nearrow *2 & & 4 & 8 & 2 \\ + & 2 & 4 & 1 & \text{Rest } 0 \end{array}$$

Nullstellen von $q(x) = 2x^2 + 4x + 1$ (restliche Nullstellen von p)

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

↪ Faktorisierung

$$p(x) = 2(x - 2)(x + 1 - \sqrt{2}/2)(x + 1 + \sqrt{2}/2)$$

Probe

Einsetzen einer Nullstelle, z.B. $x_1 = -1 + \sqrt{2}/2$, ↪

$$\begin{aligned} p(-1 + \sqrt{2}/2) &= 2(-1 + \sqrt{2}/2)^3 - 7(-1 + \sqrt{2}/2) - 2 \\ &= 2((-1)^3 + 3(-1)^2\sqrt{2}/2 + 3(-1)(\sqrt{2}/2)^2 + (\sqrt{2}/2)^3) \\ &\quad + 7 - 7\sqrt{2}/2 - 2 \\ &= -2 + 3\sqrt{2} - 3 + \sqrt{2}/2 + 7 - 7\sqrt{2}/2 - 2 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(Anwendung der binomischen Formel bei der zweiten Gleichheit)

Beispiel

Faktorisierung des Polynoms

$$p(z) = 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 1$$

ausgehend von der bekannten Nullstelle $z_1 = i$

$$\begin{aligned} p(i) &= 2i^4 - 3i^3 + 3i^2 - 3i + 1 \\ &= 2 + 3i - 3 - 3i + 1 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

reelle Koeffizienten $\implies \bar{i} = -i$ ist ebenfalls eine Nullstelle
Division von $p(z)$ durch das Produkt der beiden Linearfaktoren,

$$(z - i)(z + i) = z^2 + 1,$$

analog zur „schriftlichen Division“ natürlicher Zahlen

$$\begin{array}{r}
 (2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - 3z + 1) : (z^2 + 1) = 2z^2 - 3z + 1 \\
 \underline{2z^4 + 2z^2} \\
 -3z^3 + z^2 - 3z \\
 \underline{-3z^3 - 3z} \\
 z^2 + 1 \\
 \underline{z^2 + 1} \\
 \text{Rest } 0
 \end{array}$$

↪ $p(z) = (z^2 + 1)q(z)$ mit dem quadratischen Polynom

$$q(z) = 2z^2 - 3z + 1$$

Nullstellen von q ↪ restliche zwei Nullstellen von p

$$z_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4},$$

d.h. $z_3 = 1, z_4 = 1/2$

- Komplexe Faktorisierung:

$$p(z) = 2(z - i)(z + i)(z - 1)(z - 1/2)$$

- Reelle Faktorisierung:
Zusammenfassen der komplex konjugierten Faktoren,

$$(z - i)(z + i) = z^2 + 1,$$

↪

$$p(z) = 2(z^2 + 1)(z - 1)(z - 1/2)$$

Beispiel

Nullstellen des Polynoms

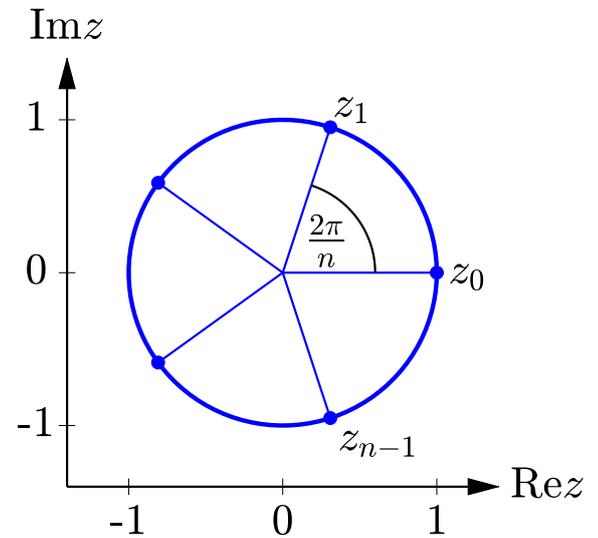
$$p(z) = z^n - 1$$

n -te Einheitswurzeln (Lösungen von $z^n = 1$):

$$z_k = \exp(2k\pi i/n), \quad k = 0, \dots, n-1$$

↪ komplexe Faktorisierung

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \exp(2k\pi i/n))$$



51 / 367

Zusammenfassen komplex konjugierter Faktoren mit Hilfe der Formel von Euler-Moivre ($e^{it} + e^{-it} = 2 \cos t$),

$$(z - \exp(it))(z - \exp(-it)) = z^2 - 2z \cos t + 1,$$

↪ reelle Faktorisierung

- Gerades n :

$$p(z) = (z - 1)(z + 1) \prod_{k=1}^{n/2-1} (z^2 - 2z \cos(2k\pi/n) + 1)$$

- Ungerades n :

$$p(z) = (z - 1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} (z^2 - 2z \cos(2k\pi/n) + 1)$$

52 / 367

Interpolation mit Polynomen

Funktionswerte f_k an $n + 1$ paarweise verschiedenen Stützstellen x_k , $k = 0, \dots, n$, können eindeutig durch ein Polynom p vom Grad $\leq n$ interpoliert werden:

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

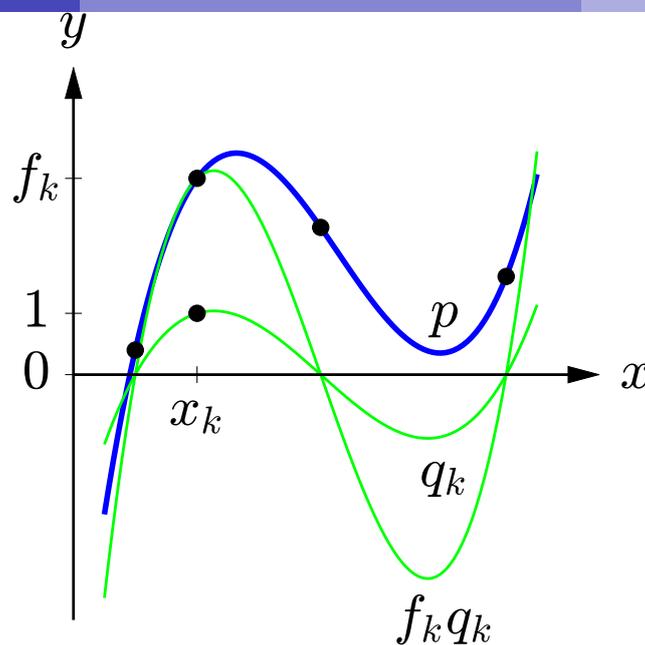
Dieses Interpolationspolynom läßt sich in der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^n f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

darstellen, wobei die Polynome q_k als Lagrange-Polynome bezeichnet werden. Sie haben im Punkt x_k den Wert 1 und verschwinden an allen anderen Punkten x_j :

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

mit δ dem Kronecker-Symbol.



Beweis

(i) Existenz:

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

\implies

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j$$

\rightsquigarrow Interpolationsbedingungen

(ii) Eindeutigkeit:

Für ein weiteres Interpolationspolynom \tilde{p} hat die Differenz $p - \tilde{p}$ mindestens $n + 1$ Nullstellen:

$$(p - \tilde{p})(x_k) = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

$\text{Grad}(p - \tilde{p}) \leq n \implies p = \tilde{p}$, denn ein nicht-triviales Polynom mit $\text{Grad} \leq n$ kann höchstens n Nullstellen haben

Beispiel

Schätzung des Minimums einer Funktion f aus den Daten

x	1	2	4
f	3	0	6

mit Hilfe eines interpolierenden quadratischen Polynoms p : $\min f \approx \min p$

Lagrange-Polynome $q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$

$$q_0(x) = \frac{x - 2}{1 - 2} \frac{x - 4}{1 - 4} = \frac{x^2 - 6x + 8}{3}$$

$$q_2(x) = \frac{x - 1}{4 - 1} \frac{x - 2}{4 - 2} = \frac{x^2 - 3x + 2}{6}$$

(q_1 wird wegen $f_1 = 0$ nicht benötigt)

Interpolierendes Polynom $p = \sum_{k=0}^2 f_k q_k$ vom Grad ≤ 2

$$\begin{aligned} p(x) &= 3q_0(x) + 0 + 6q_2(x) \\ q_0(x) &= (x^2 - 6x + 8) + (x^2 - 3x + 2) \\ &= 2x^2 - 9x + 10 \end{aligned}$$

$$0 = p'(x) = 4x - 9 \quad \implies \quad \text{Minimum bei } x = 9/4$$

$$(p''(x) = 4 > 0)$$

\rightsquigarrow Approximation

$$\min f \approx p(9/4) = 2(9/4)^2 - 9(9/4) + 10 = -1/8$$

57 / 367

Beispiel

Schätzung von Zwischenwerten an Stützstellen $x_{k+1/2} = (k + 1/2)h$ durch kubische Interpolation äquidistanter Daten (x_k, f_k) , $x_k = kh$

\rightsquigarrow 4-Punkt-Formel

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

Gewichte $-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}$: Werte der Lagrange-Polynome an der Stützstelle $x_{k+1/2}$

z.B. Wert für $x_{k+1/2} = (k + 1/2)h$ des Lagrange-Polynoms zu $x_{k-1} = (k - 1)h$ (Null bei x_k, x_{k+1}, x_{k+2})

$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x - kh}{(k-1)h - kh} \frac{x - (k+1)h}{(k-1)h - (k+1)h} \frac{x - (k+2)h}{(k-1)h - (k+2)h} \right) \Big|_{x=(k+1/2)h}$$

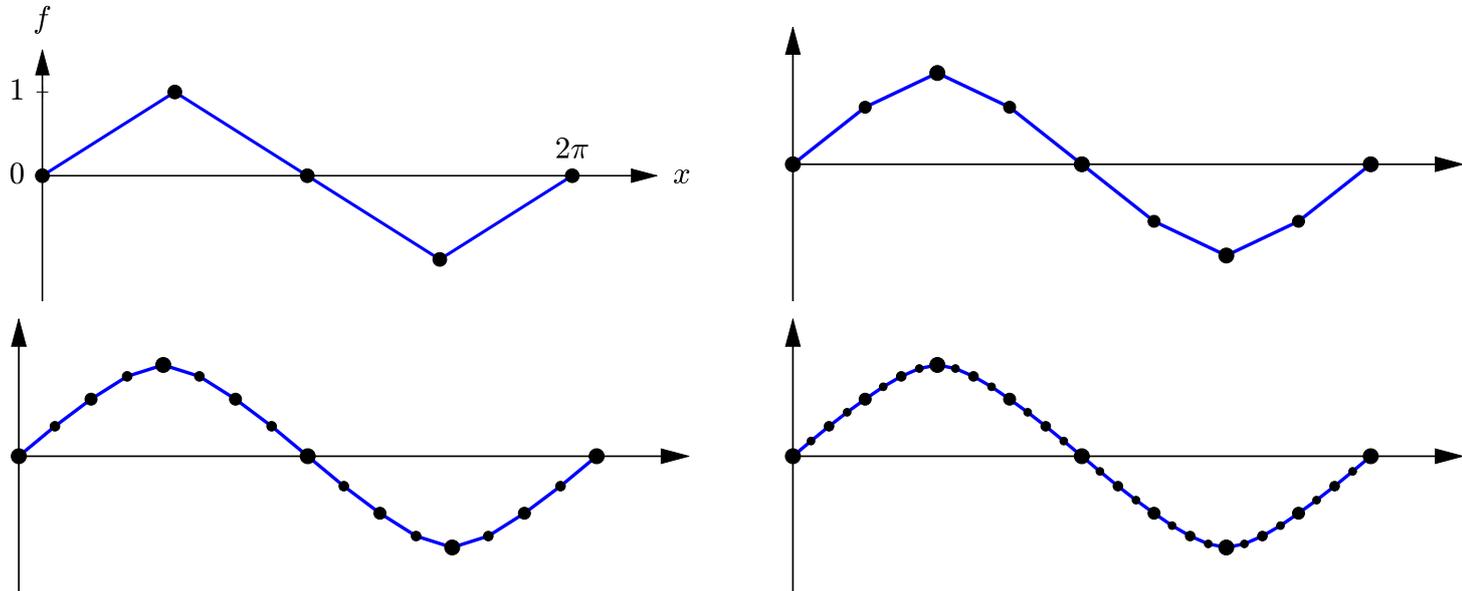
andere Koeffizienten ohne Rechnung (Symmetrie, Summe 1)

58 / 367

Approximation für die Daten

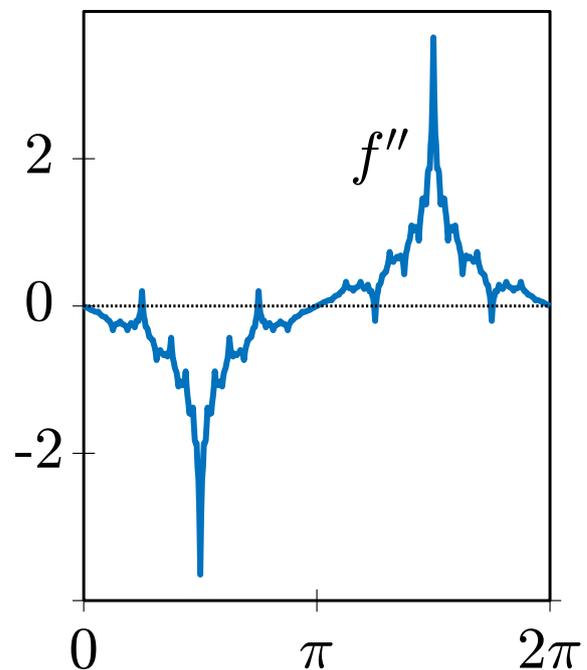
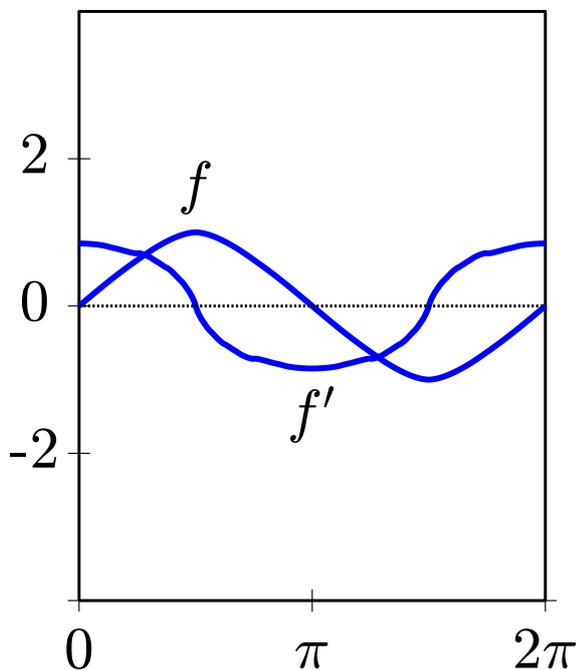
x_k	\dots	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	\dots
f_k	\dots	0	1	0	-1	0	\dots

der Sinusfunktion



glatt wirkende Grenzfunktion und deren Ableitung (links) sowie zweite Ableitung (rechts) mit fraktalem Charakter; Approximationen generiert mit Hilfe von Differenzenquotienten

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$



Rationale Funktion

Eine rationale Funktion r mit Zählergrad m und Nennergrad n ist der Quotient zweier Polynome:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n}, \quad a_m, b_n \neq 0.$$

Diese Darstellung bezeichnet man als irreduzibel, wenn p und q keinen gemeinsamen Linearfaktor besitzen. Die Nullstellen des Nenners sind dann nicht hebbare Definitionslücken der rationalen Funktion r und werden als Polstellen bezeichnet. Ihre Ordnung entspricht der Vielfachheit der Nullstelle.

Die Variable x und die Koeffizienten a_k, b_k können reell oder komplex sein. Entsprechend spricht man von einer reellen oder komplexen rationalen Funktion.

61 / 367

Beispiel

Funktionsgraph und Polstellen der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x-3)^2}$$

einfacher Pol bei $x = -1$

↔ Vorzeichenwechsel

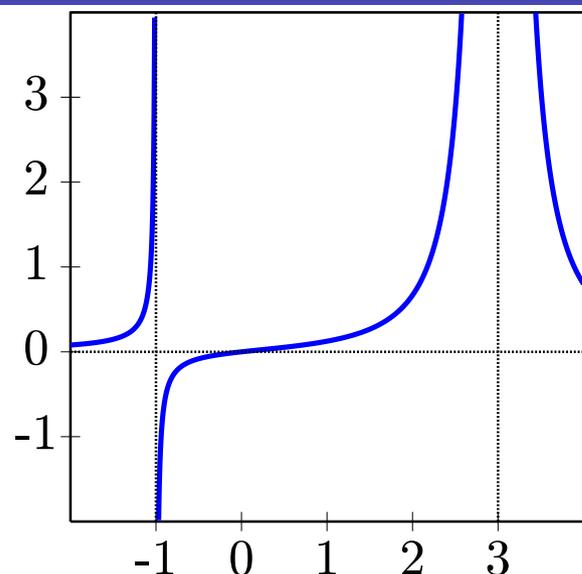
doppelter Pol bei $x = 3$

↔ kein Vorzeichenwechsel

Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$

Wertebereich $W = \mathbb{R}$



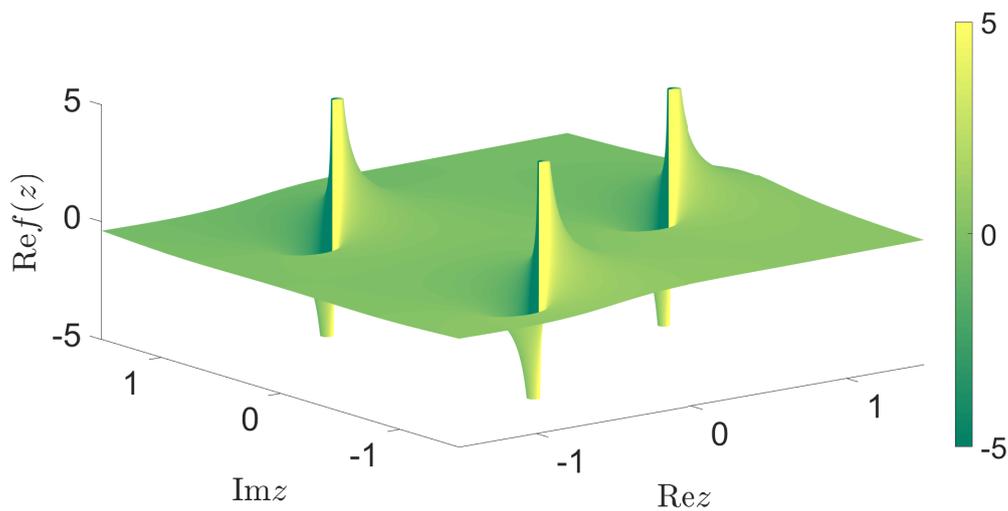
62 / 367

Beispiel

Visualisierung der rationalen Funktion

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}, \quad z = x + iy$$

über der komplexen Ebene



63 / 367

einfache Polstellen an den komplexen Einheitswurzeln:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

64 / 367

Eine rationale Funktion r mit n verschiedenen Polstellen z_j der Ordnung m_j ,

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = c(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

lässt sich eindeutig in der Form

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^n r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \cdots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

zerlegen. Dabei ist $f(z) = f_0 + f_1 z + \cdots + f_d z^d$ ein Polynom vom Grad $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ ($f = 0$, falls $d < 0$). Die rationalen Funktionen r_j werden als Hauptteile von r an den Polstellen bezeichnet. Sie beschreiben jeweils das Wachstum von $r(z)$ für $z \rightarrow z_j$.

Die Partialbruchzerlegung kann auf verschiedene Weise bestimmt werden.

(i) Koeffizientenvergleich:

Nach Multiplikation mit dem Nennerpolynom q führt ein Vergleich der Koeffizienten der Monome z^k in der Identität

$$p(z) = f(z)q(z) + \sum_{j=1}^n r_j(z)q(z)$$

auf ein quadratisches lineares Gleichungssystem für f_i und $a_{j,i}$.

(ii) Grenzwertmethode:

Für einfache Polstellen z_j ($m_j = 1$) ist

$$a_{j,1} = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)r(z) = \frac{p(z_j)}{c \prod_{k \neq j} (z_j - z_k)}.$$

Falls $f \neq 0$ ($\Leftrightarrow \text{Grad } p \geq \text{Grad } q$), erhält man das Polynom f durch Subtraktion der bereits bestimmten Hauptteile von der rationalen Funktion r .

Bei Polstellen z_j höherer Ordnung ($m_j > 1$) lässt sich nur der führende Term mit der Grenzwertmethode berechnen:

$$a_{j,m_j} = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)^{m_j} r(z) = \frac{p(z_j)}{c \prod_{k \neq j} (z_j - z_k)^{m_k}} .$$

Man kann jedoch die Methode rekursiv anwenden, indem man die jeweils berechneten Terme abzieht.

(iii) Polynomdivision:

Im Fall $\text{Grad } p \geq \text{Grad } q$ kann das Polynom f durch Polynomdivision bestimmt werden:

$$p = fq + g$$

mit $\text{Grad } g < \text{Grad } q$. Zur Bestimmung der Partialbruchzerlegung von

$$g/q = r - f$$

ist sowohl ein Koeffizientenvergleich als auch die Grenzwertmethode anwendbar.

(iv) Interpolation:

Gleichungen für die zu bestimmenden Koeffizienten f_i und $a_{j,i}$ können ebenfalls durch Einsetzen von Testwerten z_ℓ gewonnen werden. Diese Methode wird oft mit der Grenzwertmethode bei Polstellen höherer Ordnung kombiniert.

Beweis

a) Zerlegung für den Spezialfall einfacher Polstellen ($m_j = 1$):
Polynomdivision ($r = p/q = f$ Rest g) \rightsquigarrow

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{c(z - z_1) \cdots (z - z_n)}$$

Polynome g und q teilerfremd, z_j verschieden, Grad $g < n$
Lagrange-Form des Polynoms g

$$g(z) = \sum_{j=1}^n g(z_j) \prod_{k \neq j} \frac{z - z_k}{z_j - z_k}, \quad g(z_j) = p(z_j) - f(z_j)q(z_j) = p(z_j)$$

Division durch $q(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$ \rightsquigarrow

$$r(z) - f(z) = \sum_{j=1}^n \left[\frac{p(z_j)}{c \prod_{k \neq j} (z_j - z_k)} \right] \frac{1}{z - z_j},$$

d.h. $a_j = [\dots] = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)r(z)$

69 / 367

b) Zerlegung im allgemeinen Fall:

Polynomdivision \rightsquigarrow

$$r = p/q = f + g/q, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q$$

sukzessive Bestimmung der Hauptteile für die Polstellen z_j , beginnend mit z_1

$$g(z)/q(z) = g(z)/(\tilde{q}(z)(z - z_1)^{m_1}) \implies a_{1,m_1} = g(z_1)/\tilde{q}(z_1)$$

Subtraktion des entsprechenden Terms höchster Ordnung des ersten Hauptteils \rightsquigarrow

$$\tilde{r}(z) = \frac{g(z)}{q(z)} - \frac{a_{1,m_1}}{(z - z_1)^{m_1}} = \frac{g(z) - (g(z_1)/\tilde{q}(z_1))\tilde{q}(z)}{\tilde{q}(z)(z - z_1)^{m_1}}$$

Zählerpolynom null für $z = z_1 \implies$ Darstellung als Produkt $\tilde{g}(z)(z - z_1)$ und, nach Kürzen des Linearfaktors,

$$\tilde{r}(z) = \frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{q}(z)(z - z_1)^{m_1 - 1}}$$

70 / 367

mit

$$\text{Grad } \tilde{g} = \max(\text{Grad } g, \text{Grad } \tilde{q}) - 1 < \text{Grad } q - 1 = \text{Grad } \tilde{q} + (m_1 - 1)$$

↪ Iteration der Prozedur mit dem jeweils führenden Term zu einer der Polstellen

↪ sukzessive Reduktion der Ordnung der Polstellen durch Bestimmung und Subtraktion aller Terme der Hauptteile

c) Eindeutigkeit:

Annahme

$$f(z) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{a_{j,k}}{(z - z_j)^k} = \tilde{f}(z) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \frac{\tilde{a}_{j,k}}{(z - z_j)^k}$$

Multiplikation mit $(z - z_1)^{m_1}$ und Setzen von $z = z_1$

$$\implies a_{1,m_1} = \tilde{a}_{1,m_1}$$

Weglassen der entsprechenden identischen Terme auf beiden Seiten

Iteration der Prozedur bis die Gleichheit aller Koeffizienten $a_{j,k}$ gezeigt ist und dann ebenfalls $f = \tilde{f}$ gefolgert werden kann

71 / 367

Beispiel

Partialbruchzerlegung von

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^3}{z^2 + z - 2}$$

(i) Polynomialer Anteil (Zählergrad \geq Nennergrad):

Polynomdivision ↪

$$\begin{array}{r} (z^3) : (z^2 + z - 2) = z - 1 + \frac{3z - 2}{z^2 + z - 2} \\ -(z^3 + z^2 - 2z) \\ \hline -z^2 + 2z \\ -(-z^2 - z + 2) \\ \hline 3z - 2 \end{array}$$

und somit $r = f + g/q$ mit

$$f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2$$

72 / 367

(ii) Polstellen und Ansatz:

Lösungsformel für die quadratische Gleichung $q(z) = z^2 + z - 2 = 0$

\rightsquigarrow Polstellen $z_1 = 1$ und $z_2 = -2$ und

$$q(z) = (z - 1)(z + 2)$$

Ansatz für die Partialbruchzerlegung

$$\frac{g(z)}{q(z)} = \frac{3z - 2}{(z - 1)(z + 2)} = \frac{a_1}{z - 1} + \frac{a_2}{z + 2}$$

(iii) Bestimmung der Koeffizienten a_k :

Grenzwertmethode \rightsquigarrow

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) \frac{3z - 2}{(z - 1)(z + 2)} = \left. \frac{3z - 2}{z + 2} \right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

analog

$$a_2 = \left. \frac{3z - 2}{z - 1} \right|_{z=-2} = \frac{8}{3}$$

insgesamt

$$r(z) = f(z) + \frac{g(z)}{q(z)} = (z - 1) + \left(\frac{1/3}{z - 1} + \frac{8/3}{z + 2} \right)$$

Beispiel

Partialbruchzerlegung von

$$r(z) = \frac{5z^2 - 5z + 6}{z^3 - 3z^2}$$

einfache Polstelle bei $z_1 = 3$, doppelte Polstelle bei $z_2 = 0$

Zählergrad < Nennergrad \implies keine Polynomdivision notwendig

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$r(z) = \frac{5z^2 - 5z + 6}{z^3 - 3z^2} = \frac{5z^2 - 5z + 6}{z^2(z - 3)} = \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{z - 3}$$

Grenzwertmethode \rightsquigarrow

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow 0} z^2 r(z) = \left. \frac{5z^2 - 5z + 6}{z - 3} \right|_{z=0} = -2$$

$$a_3 = \lim_{z \rightarrow 3} (z - 3)r(z) = \left. \frac{5z^2 - 5z + 6}{z^2} \right|_{z=3} = 4$$

Vergleich der Funktionswerte an einem Punkt $z \neq 0 \wedge z \neq 3$, z.B. $z = 1$

\rightsquigarrow

$$r(1) = \frac{5z^2 - 5z + 6}{z^3 - 3z^2} \Big|_{z=1} \stackrel{!}{=} \left(-\frac{2}{z^2} + \frac{a_2}{z} + \frac{4}{z-3} \right) \Big|_{z=1},$$

bzw.

$$\frac{5 - 5 + 6}{1 - 3} = -2 + a_2 - 2$$

d.h. $a_2 = 1$ und

$$r(z) = -\frac{2}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{4}{z-3}$$

Beispiel

Partialbruchzerlegung von

$$r(z) = \frac{z^2 - 5z + 4}{z^3 - 3z^2 + z + 5}$$

(i) Polstellen und Ansatz:

reelle Polstelle $z_1 = -1$

Polynomdivision \rightsquigarrow

$$(z^3 - 3z^2 + z + 5) : (z + 1) = z^2 - 4z + 5$$

Lösungsformel für die quadratische Gleichung $q(z) = z^2 - 4z + 5 = 0$

\rightsquigarrow komplex konjugierte Polstellen

$$z_{2,3} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 5} = 2 \pm i$$

Faktorisierung des Nennerpolynoms

$$q(z) = (z + 1)(z - 2 - i)(z - 2 + i)$$

Ansatz

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}$$

(ii) Koeffizientenvergleich:

Multiplikation mit dem Hauptnenner \rightsquigarrow

$$z^2 - 5z + 4 =$$

$$a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i)$$

Vergleich der Koeffizienten von $1, z, z^2$ \rightsquigarrow lineares Gleichungssystem für a, b und c :

$$\begin{aligned} 4 &= (-2-i)(-2+i)a + (1)(-2+i)b + (1)(-2-i)c \\ &= 5a + (-2+i)b + (-2-i)c \\ -5 &= -4a + (-1+i)b + (-1-i)c \\ 1 &= a + b + c \end{aligned}$$

Lösung: $a = 1, b = i/2$ und $c = -i/2$

(r reell $\implies c = \bar{b}$, d.h. nur b muss berechnet werden, bzw. man kann die Identität zur Kontrolle nutzen)

77 / 367

Einsetzen der Koeffizienten in den Ansatz

\rightsquigarrow komplexe Partialbruchzerlegung

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}$$

Zusammenfassen der komplex konjugierten Terme

\rightsquigarrow reelle Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{1}{z+1} + \frac{(i/2)(z-2+i) - (i/2)(z-2-i)}{(z-2+i)(z-2-i)} \\ &= \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z^2 - 4z + 5} \end{aligned}$$

78 / 367

Reelle Partialbruchzerlegung

Eine reelle rationale Funktion r mit reellen Polstellen x_j und komplex konjugierten Polstellen $u_k \pm iv_k$ der Vielfachheit m_j bzw. n_k ,

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = c \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k},$$

lässt sich in der Form

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu=1}^{m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu=1}^{n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

zerlegen, mit einem Polynom f vom Grad $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ ($f = 0$, falls $d < 0$). Die Zahl der Summanden für x_j bzw. $u_k \pm iv_k$ ist jeweils gleich der Ordnung der entsprechenden Polstelle.

79 / 367

Insbesondere gilt für einfache Polstellen

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}.$$

Das Polynom f kann durch Polynomdivision bestimmt werden

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

d.h. g ist der Rest bei Division von p durch q . Die Koeffizienten lassen sich dann durch Koeffizientenvergleich in der Darstellung von $r - f = g/q$ nach Multiplikation mit dem Nennerpolynom berechnen. Alternativ kann man ohne Bestimmung von f auch unmittelbar einen Koeffizientenvergleich in der Identität

$$p(x) = f(x)q(x) + \left(\sum_j \dots + \sum_k \dots \right) q(x)$$

durchführen.

Die reelle Partialbruchzerlegung lässt sich ebenfalls aus der komplexen Form gewinnen, indem man komplex konjugierte Terme zusammenfasst.

80 / 367

Beweis

Zerlegung für einfache Polstellen ($m_j = n_k = 1$):

komplexe Partialbruchzerlegung \rightsquigarrow

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - z_j}$$

mit z_j den (einfachen) Nullstellen des Nennerpolynoms q und

$$a_j = \lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)r(z)$$

q reell \rightsquigarrow reelle oder Paare komplex konjugierter Nullstellen

$$z_k = u + iv, \quad z_\ell = u - iv = \overline{z_k}$$

81 / 367

Koeffizienten der entsprechenden Terme der Zerlegung

$$\overline{a_k} = \lim_{z \rightarrow z_k} \overline{(z - z_k)r(z)} = \lim_{\bar{z} \rightarrow z_\ell} (\bar{z} - z_\ell)r(\bar{z}) = a_\ell$$

d.h.

$$a_k = s + it, \quad a_\ell = s - it$$

Zusammenfassen der komplex konjugierten Terme \rightsquigarrow

$$\frac{s + it}{x - u - iv} + \frac{s - it}{x - u + iv} = \frac{2s(x - u) - 2tv}{(x - u)^2 + v^2}$$

d.h.

$$b = 2s, \quad c = -2t$$

analoge (technisch aufwändigere) Argumentation für Polstellen höherer Ordnung

82 / 367

Beispiel

Reelle Partialbruchzerlegung von

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^3 - 9x^2 + 11x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

(i) Polynomdivision: (Grad $p \geq$ Grad q):

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2, \text{ Rest } g(x) = -x^2 + x + 1 \\ -(2x^3 - 8x^2 + 10x) \\ \hline -x^2 + x + 1 \end{array}$$

\rightsquigarrow polynomialer Anteil $f(x) = 2$ und Zerlegung

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

83 / 367

(ii) Faktorisierung des Nennerpolynoms and Ansatz:

Polstelle $x_1 = 0$

weitere Polstellen durch quadratische Ergänzung

$$q(x)/x = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1^2$$

$\rightsquigarrow x_{2,3} = u \pm iv = 2 \pm i$ und entsprechende Faktorisierung des Nennerpolynoms

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 5x &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= x(x - 2 + i)(x - 2 - i) = x((x - 2)^2 + 1) \end{aligned}$$

\rightsquigarrow Ansatz

$$\frac{g(x)}{q(x)} = \frac{-x^2 + x + 1}{x((x - 2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x - 2) + c}{(x - 2)^2 + 1^2}$$

84 / 367

(iii) Koeffizientenvergleich:

Multiplikation mit dem Nennerpolynom q im Ansatz \rightsquigarrow

$$-x^2 + x + 1 = a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

Vergleich der Koeffizienten von 1, x und x^2 \rightsquigarrow lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}1 &= 5a \\1 &= -4a - 2b + c \\-1 &= a + b\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$a = \frac{1}{5}, \quad b = -\frac{6}{5}, \quad c = -\frac{3}{5}$$

resultierende reelle Partialbruchzerlegung

$$r(x) = f(x) + \frac{p(x)}{q(x)} = 2 + \left(\frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2} \right)$$

85 / 367

Alternative Methode

Bestimmung der Ansatzparameter für den rationalen Anteil mit der Grenzwertmethode

Multiplikation von $g(x)/q(x)$ mit x und Setzen von $x = 0$ \rightsquigarrow

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{1}{5}$$

Setzen von $x = 2$ \rightsquigarrow

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \quad \Longrightarrow \quad c = -\frac{3}{5}$$

Bestimmung von b durch Testen eines Punktes $x \neq 2$, z.B. $x = 1$ \rightsquigarrow

$$\frac{-1^2 + 1 + 1}{1 \cdot ((1-2)^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{1} + \frac{b(1-2) + (-3/5)}{(1-2)^2 + 1^2} \quad \Longrightarrow \quad b = -6/5$$

86 / 367

Beispiel

reelle Partialbruchzerlegung von

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

(i) Polstellen und Ansatz:

$$q(x) = (x^2 + 1)^2$$

\implies doppelte Polstellen $\pm i$, d.h. $u = 0$ und $v = 1$

Ansatz

$$\frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{b_1x + c_1}{x^2 + 1} + \frac{b_2x + c_2}{(x^2 + 1)^2}$$

87 / 367

(ii) Bestimmung der Koeffizienten:

Multiplikation des Ansatzes mit $q \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}x^3 &= (b_1x + c_1)(x^2 + 1) + b_2x + c_2 \\ &= b_1x^3 + c_1x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)\end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten von 1 , x , x^2 und $x^3 \rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1 + b_2 \\ 0 &= c_1 + c_2\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$b_1 = 1, \quad c_1 = 0, \quad b_2 = -1, \quad c_2 = 0$$

88 / 367

Alternative Methode

Verwendung der komplexen Partialbruchzerlegung:

Ansatz

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

Grenzwertmethode \rightsquigarrow

$$b = \lim_{z \rightarrow i} (z-i)^2 r(z) = \frac{i^3}{(i+i)^2} = \frac{i}{4}$$

$d = \bar{b} = -i/4 \rightsquigarrow$ ein Term der Zerlegung

$$\frac{i/4}{(z-i)^2} - \frac{i/4}{(z+i)^2} = \frac{-z}{(z^2+1)^2}$$

zweiter Term

$$r(z) - \frac{-z}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{z^2+1}$$

89 / 367

Exponentialfunktion

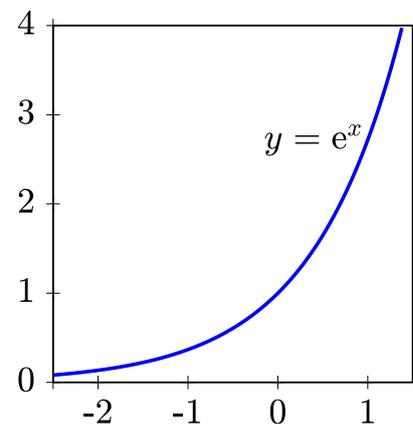
Die Potenzfunktion

$$y = e^x = \exp(x)$$

mit der Eulerschen Zahl

$$e = 2.71828 \dots$$

wird als Exponentialfunktion bezeichnet.



Sie besitzt folgende Eigenschaften.

- Definitions- und Wertebereich: $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}_+$
- Funktionalgleichung: $e^{x+y} = e^x e^y$, $1 = e^x e^{-x}$
- Ableitung und Stammfunktion: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, $\int e^x dx = e^x + C$
- Taylor-Entwicklung: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, absolut konvergent für $x \in \mathbb{R}$
- Produktdarstellung: $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x/n)^n$

90 / 367

Wird ein Startkapital K_0 mit q Prozent verzinst, so ergibt sich nach n Zinsperioden das Endkapital

$$K_n = K_0 (1 + p)^n, \quad p = q/100.$$

Am gebräuchlichsten sind eine jährliche oder eine monatliche Verzinsung. Für die entsprechenden Zinsfaktoren p_J und p_M besteht bei gleichem Kapitalwachstum die Beziehung

$$1 + p_J = (1 + p_M)^{12};$$

$q_J = 100p_J$ wird als effektiver Jahreszins bezeichnet.

(i) Ratensparen:

Wird jeweils zu Beginn einer Zinsperiode ein Betrag r eingezahlt, so erhält man nach n Zinsperioden das Guthaben

$$K_n = r (1 + p) \frac{(1 + p)^n - 1}{p}.$$

91 / 367

(ii) Tilgung eines Darlehens:

Bei Tilgung eines Darlehens K_0 mit einer jeweils zum Ende einer Zinsperiode gezahlten Rate r ist die Restdarlehenssumme nach n Zinsperioden

$$K_n = K_0 (1 + p)^n - r \frac{(1 + p)^n - 1}{p}.$$

Für eine vollständige Tilgung ($K_n = 0$) ist die Rate

$$r_\star = K_0 (1 + p)^n \frac{p}{(1 + p)^n - 1}$$

erforderlich.

Die Formel für K_n beschreibt ebenfalls das Restkapital bei Zahlungen einer Rente r (jeweils zum Ende einer Zinsperiode) aus einem verzinsten Grundkapital K_0 . In diesem Fall ist r_\star die Rente, die über einen Zeitraum von n Zinsperioden maximal gezahlt werden kann.

Beweis

(i) Verzinsung eines Sparguthabens:

Zinsen pro Zinsperiode: $K (q/100) = K p$

\rightsquigarrow Wachstum mit Faktor $(1 + p)$ pro Zinsperiode, d.h. mit Faktor $(1 + p)^n$ nach n Zinsperioden

$$K_0 \rightarrow K_n = K_0 (1 + p)^n$$

Umrechnung von monatlicher auf jährliche Verzinsung

$$K_0 (1 + p_M)^{12} \stackrel{!}{=} K_0 (1 + p_J)$$

\rightsquigarrow Formel für den effektiven Jahreszins

93 / 367

(ii) Ratensparen:

erste Rate, verzinst über n Zinsperioden

\rightsquigarrow Beitrag von $r (1 + p)^n$ zum Endkapital

zweite Rate \rightsquigarrow Beitrag $r (1 + p)^{n-1}$

...

n -te Rate \rightsquigarrow Beitrag $r (1 + p)$

Bilden der Summe \implies

$$\begin{aligned} K_n &= r \left((1 + p)^n + (1 + p)^{n-1} + \dots + (1 + p) \right) \\ &= r (1 + p) \left((1 + p)^{n-1} + (1 + p)^{n-2} + \dots + 1 \right) \\ &= r (1 + p) \sum_{k=0}^{n-1} (1 + p)^k \end{aligned}$$

Formel für eine geometrische Summe \rightsquigarrow

$$K_n = r (1 + p) \frac{(1 + p)^n - 1}{p}$$

wie behauptet

94 / 367

(iii) Tilgung eines Darlehens:

Beweis der Formel für die Restdarlehenssumme K_n nach n Zinsperioden mit vollständiger Induktion

- Induktionsanfang $n = 1$: Verzinsung mit Faktor $(1 + p)$ und Zahlung der Tilgungsrate r am Ende der Zinsperiode \rightsquigarrow

$$K_1 = K_0(1 + p) - r \quad \checkmark$$

- Induktionsschluss $n - 1 \rightarrow n$: Induktionsvoraussetzung (IV)

$$K_{n-1} = K_0(1 + p)^{n-1} + r \frac{(1 + p)^{n-1} - 1}{p}$$

Verzinsung von K_{n-1} und Zahlung einer weiteren Rate r \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} K_n &= K_{n-1}(1 + p) - r \\ &\stackrel{(IV)}{=} \left(K_0(1 + p)^{n-1} + r \frac{(1 + p)^{n-1} - 1}{p} \right) (1 + p) - r \\ &= K_0(1 + p)^n + r \left[\frac{(1 + p)^n - (1 + p)}{p} - 1 \right] \end{aligned}$$

Umformung $[\dots] = \frac{(1 + p)^n - 1}{p}$

\rightsquigarrow behauptete Formel für K_n

Beispiel

Zinsanalyse des Verkaufs von Manhattan (11000 Morgen für 60 Gulden) im Jahr 1626:

jährlicher Zinssatz von 7 Prozent \rightsquigarrow Guthaben im Jahr 2000 von

$$60 \text{ NLG} \cdot (1.07)^{374} = 5.857 \cdot 10^{12} \text{ NLG} \quad (\cong 2.658 \cdot 10^{12} \text{ EUR})$$

monatliche Verzinsung:

$$60 \text{ NLG} \cdot (1 + 7/1200)^{4488} = 13.030 \cdot 10^{12} \text{ NLG} \quad (\cong 5.913 \cdot 10^{12} \text{ EUR})$$

kontinuierliche Verzinsung $((1 + p/n)^n \rightarrow \exp(p))$

$$60 \text{ NLG} \cdot \exp(0.07 \cdot 374) = 14.060 \cdot 10^{12} \text{ NLG} \quad (\cong 6.380 \cdot 10^{12} \text{ EUR})$$

Fläche von Manhattan: ca. 89 Quadratkilometer

bei Wohnungspreis von 6500 USD/Quadratmeter ausreichend Kapital für ein Wohnhaus mit 4 Stockwerken über der Gesamtfläche

Beispiel

Analyse verschiedener Darlehen in Abhängigkeit von Zins und Laufzeit

(i) Ratenberechnung:

Betrag $K_0 = 200000$ EUR, Festzins $5\% \hat{=} p_J = 5/100$, Laufzeit $n = 30$ Jahre,

monatlicher Zinssatz: $p_M = (1 + p_J)^{1/12} - 1 = 0.04074 \hat{=} 4.074\%$

monatliche Rate

$$r_{\star} = K_0 \frac{p_M(1 + p_J)^n}{(1 + p_J)^n - 1} = 1060.11 \text{ EUR}$$

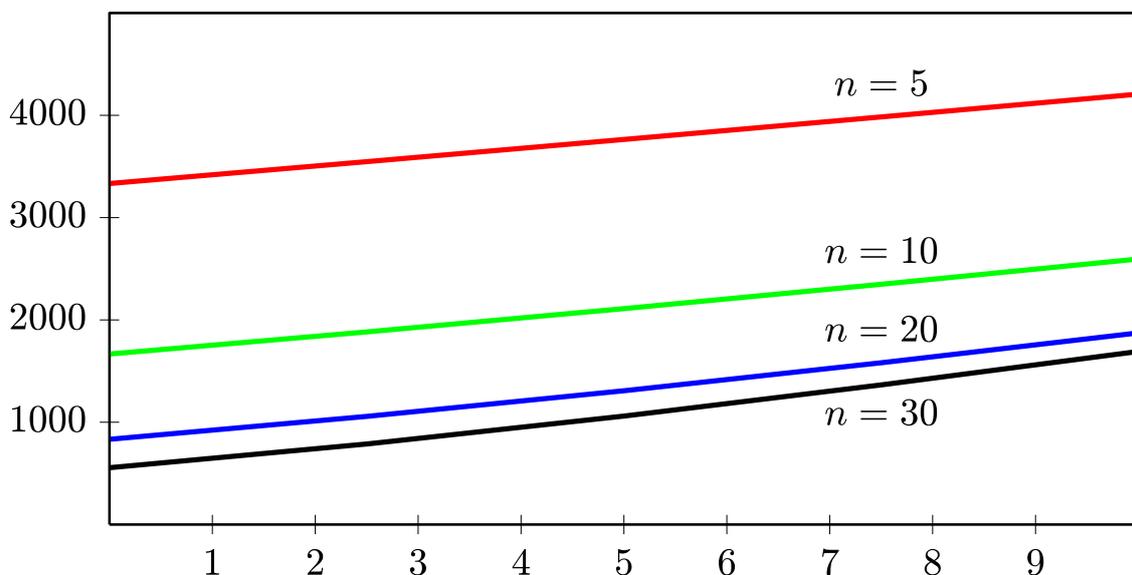
Berechnung durch Nullsetzen des Darlehensrestbetrages K_{12n} in der Verzinsungsformel und Ersetzen von $(1 + p_M)^{12}$ durch $1 + p_J$

$$0 \stackrel{!}{=} K_{12n} = K_0 (1 + p_M)^{12n} - r \frac{(1 + p_M)^{12n} - 1}{p_M}$$

Die Gesamtzahlung $30 \cdot 12r_{\star} = 381639.60$ EUR ist um 90.8% höher als die Darlehenssumme.

97 / 367

monatliche Rate für ein Darlehen von $K_0 = 200000$ EUR EUR als Funktion des Zinssatzes (0... 10 Prozent) für verschiedene Laufzeiten n



98 / 367

Ratensparen und Rentenzahlungen

(i) Ratensparen:

Sparrate $r = 100$ Euro jeweils zum Monatsanfang,

effektiver Jahreszins von 4% ($p_J = 4/100$),

Zeitraum von $n = 45$ Jahren (Dauer der Berufstätigkeit)

↪ Endkapital nach $12n$ Monaten

$$\begin{aligned} K &= r(1 + p_M) \frac{(1 + p_M)^{12n} - 1}{p_M} \\ &= 100(1 + 0.003273) \frac{(1 + 0.003273)^{540} - 1}{0.003273} \\ &= 148363 \text{ EUR} \end{aligned}$$

mit

$$p_M = (1 + p_J)^{1/12} - 1 = 0.003273$$

dem umgerechneten monatlichen Zinsfaktor

99 / 367

(ii) Monatliche Rente aus angespartem Kapital:

Zahlungszeitraum $m = 20$ Jahre (vom Rentenbeginn mit 65 Jahren bis zum durchschnittlichen Lebensalter von 85 Jahren),

Auszahlungen jeweils am Monatsbeginn,

gleichbleibende Verzinsung

↪ monatliche Rente

$$\begin{aligned} R &= K(1 + p_M)^{12m-1} \frac{p_M}{(1 + p_M)^{12m} - 1} \\ &= 148363(1 + 0.003273)^{239} \frac{0.003273}{(1 + 0.003273)^{240} - 1} \\ &= 890 \text{ EUR} \end{aligned}$$

Verhältnis der Rente zur Sparrate

$$R : r = 890 : 100 = 8.9$$

(sehr große Steigerung aufgrund des Zinseszins-effekts)

Begründung

Restkapital nach Zahlung der ersten Rente:

$$K - R$$

Restkapital, verzinst für ein Jahr, nach Zahlung der zweiten Rente:

$$(K - R)(1 + p_M) - R = Kq - Rq - R, \quad q = 1 + p_M$$

...

Restkapital nach Zahlung der letzten Rente zu Beginn des $12m$ -ten Monats:

$$Kq^{12m-1} - Rq^{12m-1} - Rq^{12m-2} - \dots - R = Kq^{12m-1} - R \frac{q^{12m} - 1}{p_M}$$

Nullsetzen \rightsquigarrow Ausdruck für R

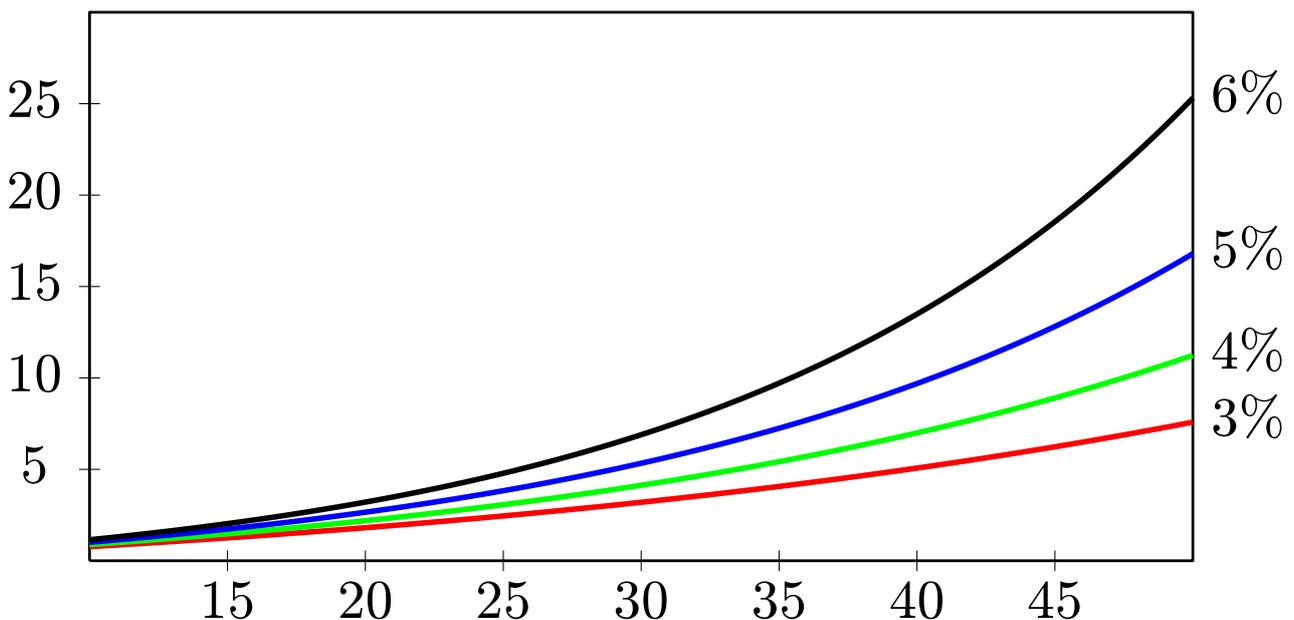
Formel für das Verhältnis von Rente zu Sparrate

$$\frac{R}{r} = \underbrace{q \frac{q^{12n} - 1}{p_M}}_{K/r} \underbrace{q^{12m-1} \frac{p_M}{q^{12m} - 1}}_{R/K} = q^{12m} \frac{q^{12n} - 1}{q^{12m} - 1}$$

mit $q = 1 + p_M$

101 / 367

Darstellung von R/r in Abhängig von der Anzahl n der Jahre des Ansparzeitraums für $m = 20$ Auszahlungsjahre und für verschiedene Zinssätze



102 / 367

Natürlicher Logarithmus

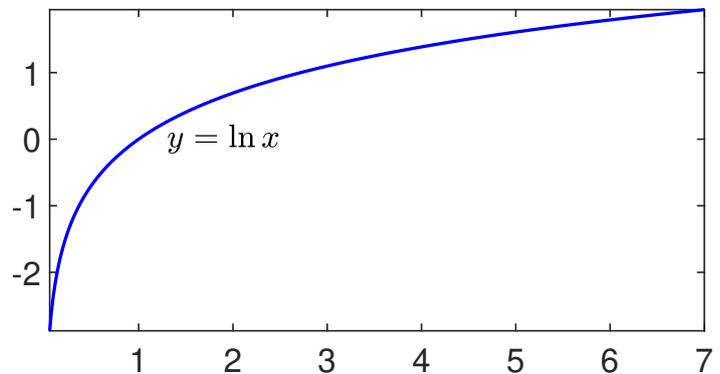
Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion:

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$

Sie bildet $(0, \infty)$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R} ab, ist konkav und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

Insbesondere ist $\ln(1/x) = -\ln x$.



103 / 367

Beispiel

Radioaktiver Zerfall

Anzahl N der Atome zum Zeitpunkt t

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

Halbwertszeit T

$$N(T) = \frac{1}{2}N(0) \iff e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \iff T = \ln 2 / \lambda$$

Tschernobyl \rightsquigarrow Verstrahlung von Pilzen mit 2000 Bq/kg durch Cäsium-137 (Halbwertszeit: 29.7 Jahre)

$$N(t) = 2000 \exp(-\lambda t), \quad \lambda = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

\rightsquigarrow Erreichen des zulässigen Grenzwertes von 600 Bq/kg nach $t = 52$ Jahren:

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \implies -0.023t = \ln(\underbrace{600/2000}_{0.3})$$

104 / 367

Beispiel

Rechenschieber

Funktionalgleichung

$$\log x + \log y = \log(xy)$$

↪ Berechnung eines Produktes durch Aneinanderlegen (Summe) zweier Lineale mit logarithmischer Skala

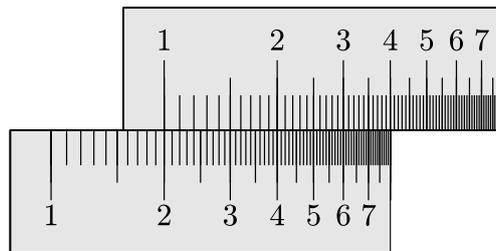


Abbildung: $2 \cdot 3 = 6$

Addition von $\ln 3$ (Abstand der Markierungen 1 und 3 im oberen Lineal) zu $\ln 2$ (Abstand der Markierungen 1 und 2 im unteren Lineal) $\rightsquigarrow \ln 6$ (unteres Lineal)

105 / 367

Allgemeine Potenzfunktion und Logarithmus

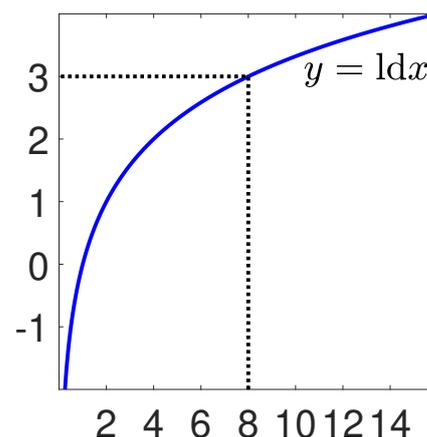
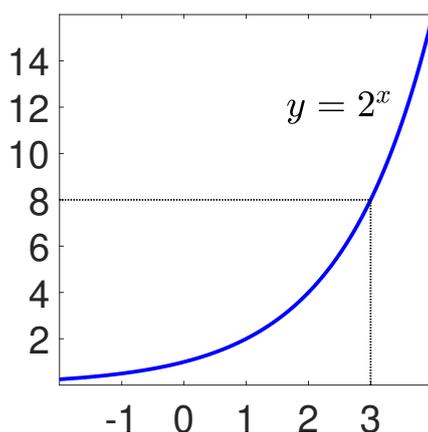
Für $a > 0$ definiert man

$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

mit der Umkehrfunktion

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

Insbesondere schreibt man $\log = \log_{10}$ für den Logarithmus zur Basis 10 und $\text{ld} = \log_2$ für den dualen Logarithmus.



106 / 367

Logarithmische Funktionsdarstellungen

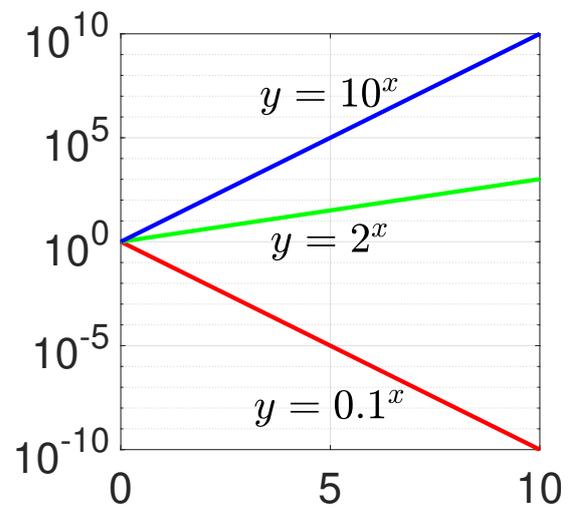
(i) Halblogarithmische Darstellung: $\log y$ versus x

Wachstumsgesetz

$$y = a^x, \quad a > 0$$

$$\Leftrightarrow \log y = (\log a) x$$

(Gerade mit Steigung $\log a$)



107 / 367

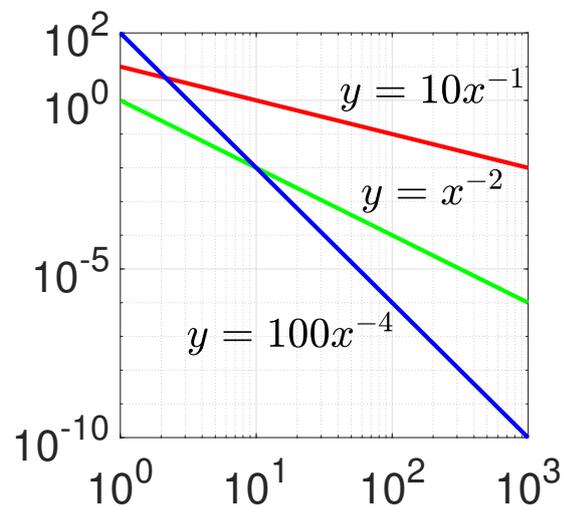
(ii) Doppelt logarithmische Darstellung: $\log y$ versus $\log x$

Darstellung von Fehlerraten

$$y = c x^{-r}$$

$$\Leftrightarrow \log y = \log c - r \log x$$

(Gerade, Steigung $-r \hat{=}$ negative Rate)



108 / 367

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

Für die Exponential- und Logarithmusfunktion gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s / a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ a^{st} &= (a^s)^t & t \log_a x &= \log_a x^t, \end{aligned}$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ und $x, y > 0$.

Darüber hinaus gilt für die Umrechnung zwischen verschiedenen Basen

$$\log_b x = \log_b a \log_a x.$$

Einige für Umrechnungen wichtige Werte sind in der nebenstehenden Tabelle angegeben. Beispielsweise ist

$$\log x = (\log e) \ln x = 0.4343 \ln x$$

	2	e	10
ld		1.4427	3.3219
ln	0.6931		2.3026
log	0.3010	0.4343	

($b = 10, a = e$).

109 / 367

Beweis

(i) Äquivalenz der Regeln:

Logarithmieren der Regeln für die Exponentialfunktionen \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} s + t &= \log_a(a^s a^t) \\ s - t &= \log_a(a^s / a^t) \\ st &= \log_a((a^s)^t) \end{aligned}$$

Setzen von

$$x = a^s, y = a^t \Leftrightarrow \log_a x = s, \log_a y = t$$

\rightsquigarrow Formeln für die Logarithmusfunktionen

(ii) Begründung der Regeln für die Exponentialfunktionen:

Funktionalgleichungen \implies erste beide Identitäten

$a^r = e^{r \ln a}$ (Definition) mit $r = st$ und $r = s \implies$ dritte Identität:

$$a^{st} = e^{st \ln a} = (e^{s \ln a})^t = (a^s)^t$$

110 / 367

(iii) Umrechnungsformel:

Anwenden der Potenzfunktion $r \mapsto b^r \rightsquigarrow$ äquivalente Identität

$$x = b^{\log_b a \log_a x}$$

Vereinfachen der rechten Seite mit Hilfe der Regeln $b^{st} = (b^s)^t$, $c^{\log_c r} = r$
mit $c = b$ und $c = a \rightsquigarrow$

$$b^{\log_b a \log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x \quad \checkmark$$

- Spezialfall $b = 10$, $a = e$

\rightsquigarrow Regel für die Umrechnung des dezimalen in den natürlichen Logarithmus

Beispiel

Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen

(i) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^s) = s \ln a \implies$

$$\begin{aligned} \ln(4x^2) - 2 \ln(2) &= \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2 \ln 2 \\ &= 2 \ln 2 + 2 \ln x - 2 \ln 2 \\ &= 2 \ln x \end{aligned}$$

(ii) $\log_4 a^s = s \log_4 a$, $\text{ld}(a + b) = \text{ld } a + \text{ld } b$, $\log_4 a = (\log_4 2) \text{ld } a \implies$

$$\begin{aligned} \log_4(x^2) + \text{ld}(2x) &= 2 \log_4 x + \text{ld } 2 + \text{ld } x \\ &= 2(\log_4 2) \text{ld } x + \text{ld } 2 + \text{ld } x \end{aligned}$$

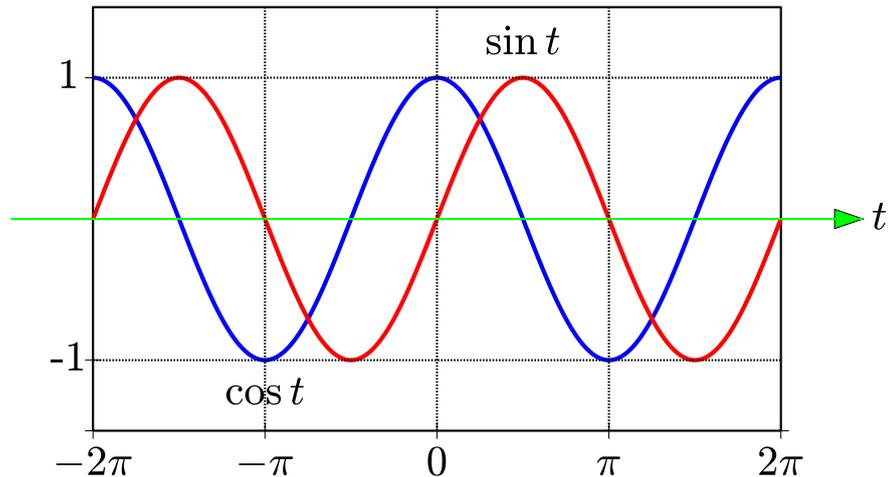
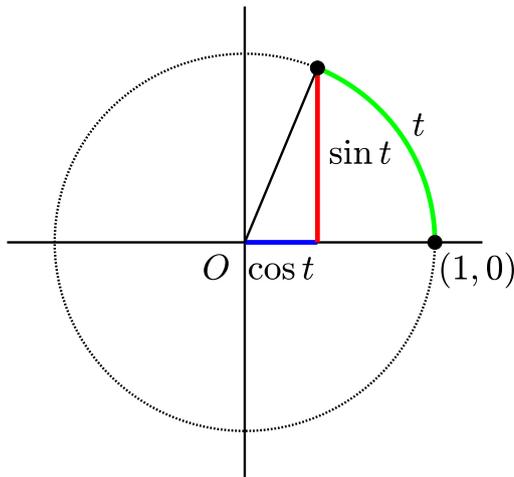
$\log_4 2 = 1/2 \rightsquigarrow$

$$\text{ld } x + \text{ld } 2 + \text{ld } x = \text{ld } 2 + 2 \text{ld } x = \text{ld}(2x^2)$$

Mit

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

werden die Koordinaten des um den Ursprung O mit Winkel t gedrehten Punktes $(1, 0)$ bezeichnet. Bis auf das Vorzeichen entsprechen also Kosinus und Sinus den Verhältnissen von An- bzw. Gegenkathete zur Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck.



113 / 367

Die beiden Kreisfunktionen sind 2π -periodisch und es gilt

- $\cos t = \sin(t + \pi/2)$,
- $\cos t = \cos(-t)$, $\sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

Einige spezielle Werte:

	0	$\pi/6 \hat{=} 30^\circ$	$\pi/4 \hat{=} 45^\circ$	$\pi/3 \hat{=} 60^\circ$	$\pi/2 \hat{=} 90^\circ$	$\pi \hat{=} 180^\circ$
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Ableitungen und Stammfunktionen:

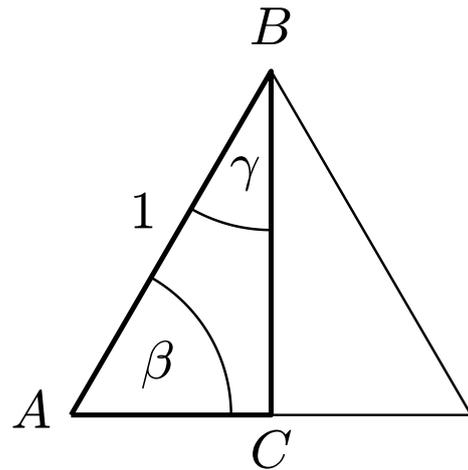
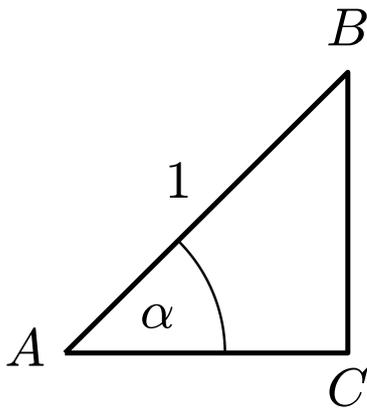
$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t, \quad \frac{d}{dt} \sin t = \cos t$$

$$\int \cos t \, dt = \sin t + C, \quad \int \sin t \, dt = -\cos t + C$$

114 / 367

Beweis

Berechnung spezieller Werte durch Betrachten eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks (links) und eines gleichseitigen Dreiecks (rechts)



115 / 367

(i) Gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck:

$$\alpha = (180^\circ - 90^\circ)/2 = 45^\circ, \quad |\overline{AB}| = 1, \quad |\overline{AC}| = s = |\overline{BC}|$$

Satz des Pythagoras

$$|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2 = 1^2$$

$$\implies s = \sqrt{1/2} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \text{ und}$$

$$\cos \alpha = |\overline{AC}| = \sqrt{2}/2, \quad \sin \alpha = |\overline{BC}| = \sqrt{2}/2$$

(ii) Gleichseitiges Dreieck (linke Hälfte):

$$\beta = 180^\circ/3 = 60^\circ, \quad \gamma = 60^\circ/2 = 30^\circ, \quad |\overline{AB}| = 1, \quad |\overline{AC}| = 1/2$$

Satz des Pythagoras \implies

$$|\overline{BC}|^2 = 1^2 - (1/2)^2 = 3/4, \text{ d.h. } |\overline{BC}| = \sqrt{3}/2$$

und

$$\begin{aligned} \cos \beta &= |\overline{AC}| = 1/2, & \sin \beta &= |\overline{BC}| = \sqrt{3}/2 \\ \cos \gamma &= |\overline{BC}| = \sqrt{3}/2, & \sin \gamma &= |\overline{AC}| = 1/2 \end{aligned}$$

116 / 367

Formel von Euler-Moivre

Die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument lässt sich mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen ausdrücken:

$$\exp(it) = \cos t + i \sin t$$

für $t \in \mathbb{R}$. Der Kosinus und der Sinus entsprechen also dem Real- und Imaginärteil komplexer Zahlen mit Betrag 1 ($|\exp(it)| = 1$).

Invertiert man die obige Formel, so folgt

$$\begin{aligned}\cos t &= \operatorname{Re} e^{it} = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}) \\ \sin t &= \operatorname{Im} e^{it} = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it}) .\end{aligned}$$

Die Identitäten zwischen \exp , \cos und \sin gehen auf Euler and Moivre zurück. Sie bilden die Grundlage für die geometrische Interpretation komplexer Zahlen und spielen in der Fourier-Analyse eine wichtige Rolle.

117 / 367

Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

Für die Kreisfunktionen \sin und \cos gelten folgende Beziehungen:

- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$

Insbesondere ist

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

und eine äquivalente Form der ersten dieser beiden Identitäten ist

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha .$$

118 / 367

Beweis

(i) Kosinus:

Formel von Euler-Moivre

$$\cos t = \frac{1}{2} (e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i} (e^{it} - e^{-it})$$

\implies

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}) \cdot \frac{1}{2} (e^{i\beta} + e^{-i\beta}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha-\beta)} + e^{i(\beta-\alpha)} + e^{i(-\alpha-\beta)}) \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2i} (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \cdot \frac{1}{2i} (e^{i\beta} - e^{-i\beta}) \\ &= -\frac{1}{4} (e^{i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha-\beta)} - e^{i(\beta-\alpha)} + e^{i(-\alpha-\beta)})\end{aligned}$$

Subtraktion \rightsquigarrow Aufhebung der Terme $e^{i(\alpha-\beta)}$, $e^{-i(\alpha-\beta)}$, d.h.

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (e^{i(\alpha+\beta)} + e^{-i(\alpha+\beta)}) = \cos(\alpha + \beta)$$

119 / 367

setzen von $\beta = \alpha$ \rightsquigarrow

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

bzw. mit $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$$\cos(2\alpha) = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

(ii) Sinus:

Beweis der Formel für $\sin(\alpha + \beta)$ analog

Alternativ:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha + \beta - \pi/2) \\ &= \cos \alpha \cos(\beta - \pi/2) - \sin \alpha \sin(\beta - \pi/2)\end{aligned}$$

$$\cos(\beta - \pi/2) = \sin \beta, \quad \sin(\beta - \pi/2) = -\cos \beta$$

\rightsquigarrow Formel für $\sin(\alpha + \beta)$

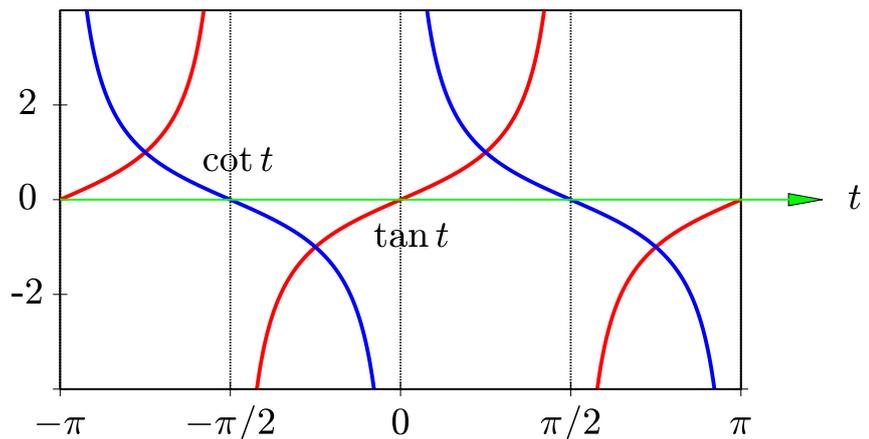
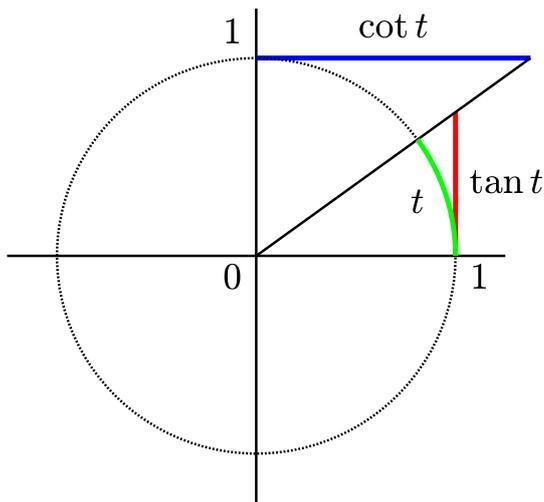
120 / 367

Tangens und Kotangens

Die Funktionen Tangens und Kotangens sind durch

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

definiert. Bis auf das Vorzeichen geben sie das Verhältnis der Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck an.



121 / 367

Einige spezielle Werte:

	0	$\frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} \hat{=} 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} \hat{=} 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Ableitungen und Stammfunktionen:

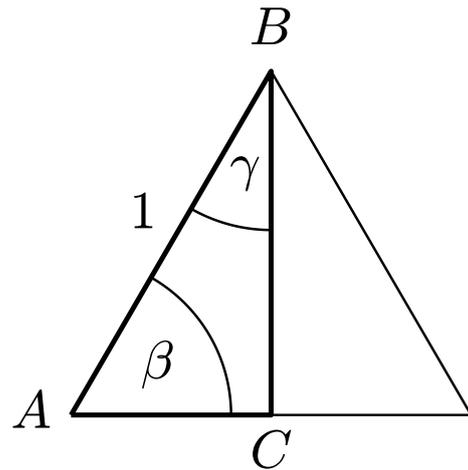
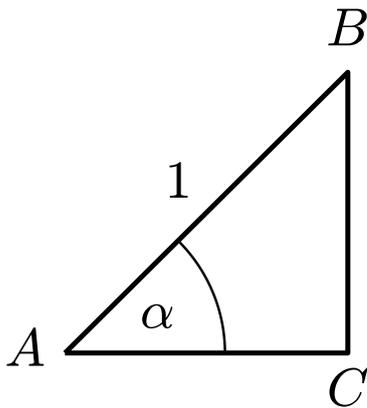
$$\frac{d}{dt} \tan t = \cos^{-2} t, \quad \frac{d}{dt} \cot t = -\sin^{-2} t$$

$$\int \tan t \, dt = -\ln |\cos t| + C, \quad \int \cot t \, dt = \ln |\sin t| + C$$

122 / 367

Beweis

Berechnung spezieller Werte durch Betrachten eines gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks (links) und eines gleichseitigen Dreiecks (rechts)



123 / 367

(i) Gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck:

$$\alpha = (180^\circ - 90^\circ)/2 = 45^\circ, \quad |\overline{AB}| = 1, \quad |\overline{AC}| = s = |\overline{BC}|$$

Satz des Pythagoras

$$|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2 = 1^2$$

$$\implies s = \sqrt{1/2} = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2 \text{ und}$$

$$\tan \alpha = |\overline{BC}|/|\overline{AC}| = 1, \quad \cot \alpha = 1/\tan \alpha = 1$$

(ii) Gleichseitiges Dreieck (linke Hälfte):

$$\beta = 180^\circ/3 = 60^\circ, \quad \gamma = 60^\circ/2 = 30^\circ, \quad |\overline{AB}| = 1, \quad |\overline{AC}| = 1/2$$

Satz des Pythagoras \implies

$$|\overline{BC}|^2 = 1^2 - (1/2)^2 = 3/4, \text{ d.h. } |\overline{BC}| = \sqrt{3}/2$$

und

$$\begin{aligned} \tan \beta &= |\overline{BC}|/|\overline{AC}| = (\sqrt{3}/2)/(1/2) = \sqrt{3}, & \cot \beta &= 1/\tan \beta = 1/\sqrt{3} \\ \tan \gamma &= |\overline{AC}|/|\overline{BC}| = (1/2)/(\sqrt{3}/2) = 1/\sqrt{3}, & \cot \gamma &= 1/\tan \gamma = \sqrt{3} \end{aligned}$$

124 / 367

Arkusfunktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen \sin , \cos , \tan und \cot werden mit

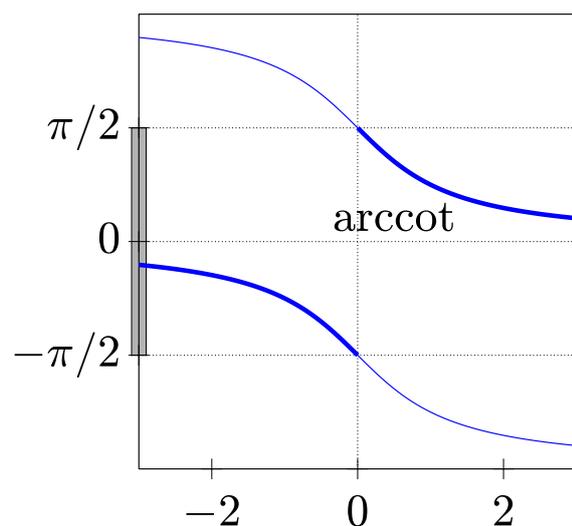
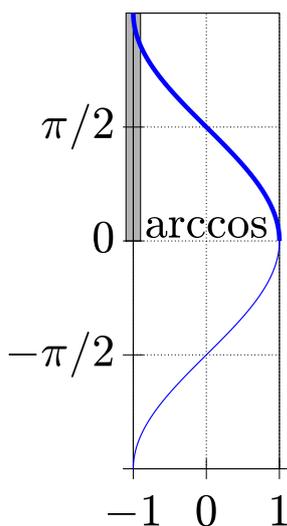
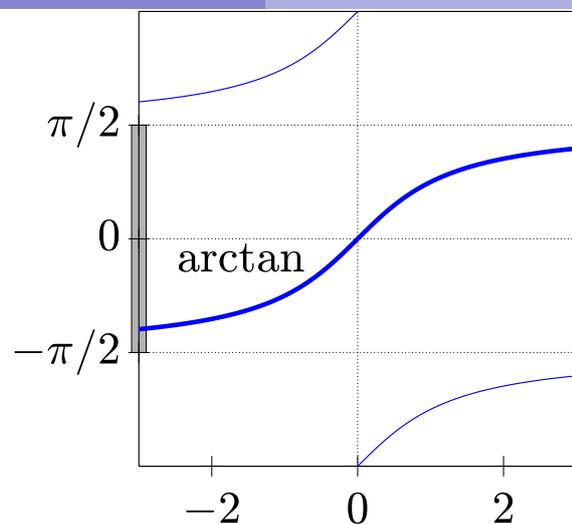
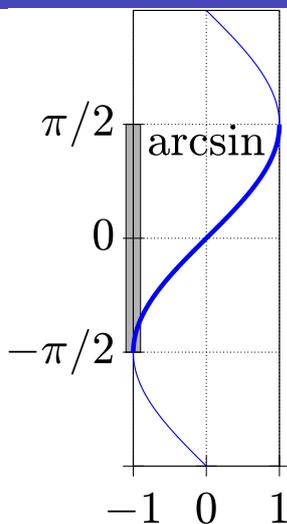
$$\arcsin, \arccos, \arctan, \operatorname{arccot}$$

bezeichnet.

Da keine der trigonometrischen Funktionen injektiv ist, müssen für die Definitions- bzw. Wertebereiche D und W der Arkusfunktionen geeignete Teilintervalle von \mathbb{R} gewählt werden. Für die kanonische, in der nachstehenden Tabelle angegebene Wahl sind die entsprechenden Äste der Graphen fett gezeichnet.

	D	W
\arcsin	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$
\arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
\arctan	\mathbb{R}	$(-\pi/2, \pi/2)$
arccot	$\mathbb{R} \setminus 0$	$(-\pi/2, \pi/2) \setminus 0$

125 / 367



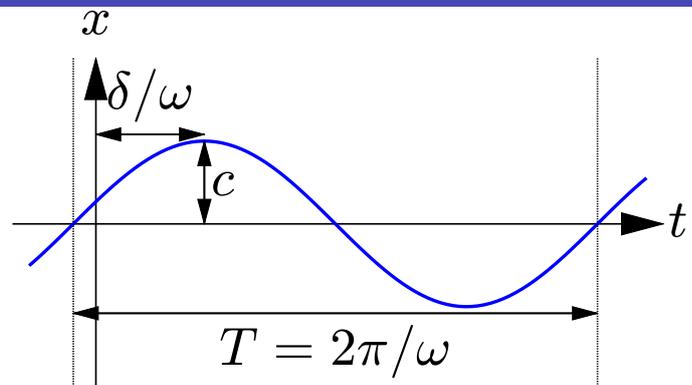
126 / 367

	d/dx	$\int \dots dx$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2} + C$
$\operatorname{arccot} x$	$-1/(1+x^2)$	$x \operatorname{arccot} x + \ln \sqrt{1+x^2} + C$

Harmonische Schwingung

Eine harmonische Schwingung mit Amplitude $c \geq 0$, Phasenverschiebung δ und Frequenz ω bzw. Periode $T = 2\pi/\omega$ hat die Form

$$x(t) = c \cos(\omega t - \delta).$$



Äquivalente Darstellungen sind

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} c \exp(i(\omega t - \delta)) \\ &= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \end{aligned}$$

mit $a = c \cos \delta$, $b = c \sin \delta$, d.h. (c, δ) sind die Polarkoordinaten von (a, b) :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \tan \delta = b/a.$$

Beweis

(i) Umrechnung der Parameter:

Formel von Euler-Moivre, $e^{it} = \cos t + i \sin t \implies$

$$\cos(\omega t - \delta) = \operatorname{Re} e^{i(\omega t - \delta)}$$

Additionstheorem \rightsquigarrow

$$c \cos(\omega t - \delta) = c (\cos(\omega t) \cos \delta + \sin(\omega t) \sin \delta)$$

d.h. $a = c \cos \delta$, $b = c \sin \delta$

(ii) Berechnung von Amplitude und Phase:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 \cos^2 \delta + c^2 \sin^2 \delta} = \sqrt{c^2} \sqrt{\cos^2 \delta + \sin^2 \delta} = c$$

und

$$\delta = \arctan(b/a) + \varphi, \quad \varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{für } a < 0 \text{ und } b < 0 \end{cases}$$

mit der Konvention $\arctan(b/0) = \operatorname{sign}(b) \pi/2$.

129 / 367

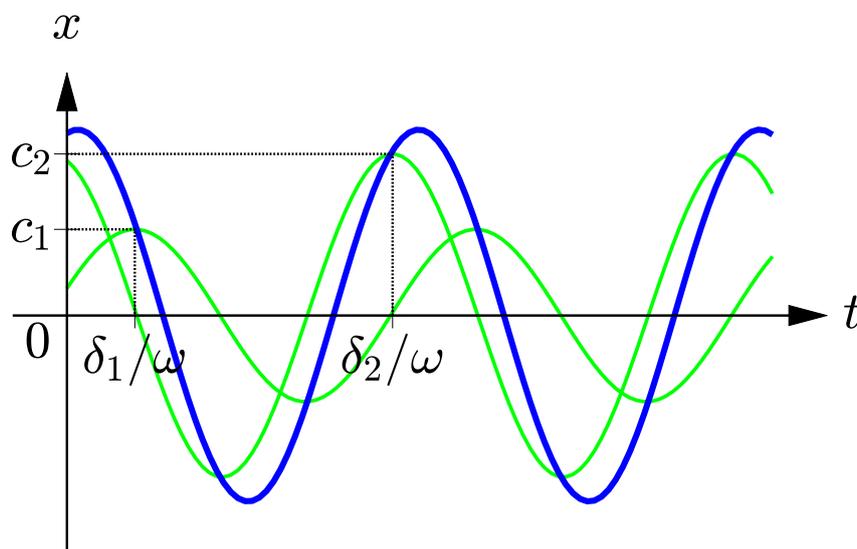
Überlagerung harmonischer Schwingungen

Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen (in der Abbildung fett gezeichnet)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2,$$

ist harmonisch mit Amplitude $c = \sqrt{c_1^2 + 2 \cos(\delta_1 - \delta_2) c_1 c_2 + c_2^2}$ und

Phase $\delta = \arg(c_1 e^{i\delta_1} + c_2 e^{i\delta_2})$.



130 / 367

Alternativ berechnen sich Amplitude und Phase aus der Darstellung

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

gemäß

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}, \quad \tan \delta = \left(\frac{b_1 + b_2}{a_1 + a_2} \right),$$

d.h. (c, δ) sind die Polarkoordinaten von $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$.

131 / 367

Beweis

(i) Komplexe Form der Überlagerung:

$$\begin{aligned} c \cos(\omega t - \delta) &= \operatorname{Re} \left(c e^{i(\omega t - \delta)} \right) = \operatorname{Re} \left(c_1 e^{i(\omega t - \delta_1)} + c_2 e^{i(\omega t - \delta_2)} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\left[c_1 e^{-i\delta_1} + c_2 e^{-i\delta_2} \right] e^{i\omega t} \right) \end{aligned}$$

$e^{-i\delta} = z = [\dots]$ bzw. $e^{i\delta} = \bar{z} \rightsquigarrow \delta = \arg \bar{z} = \arg (c_1 e^{i\delta_1} + c_2 e^{i\delta_2})$ und

$$c^2 = |z|^2 = z\bar{z} = (c_1 e^{-i\delta_1} + c_2 e^{-i\delta_2})(c_1 e^{i\delta_1} + c_2 e^{i\delta_2})$$

Ausmultiplizieren \rightsquigarrow

$$c^2 = c_1^2 + c_1 c_2 e^{i(\delta_2 - \delta_1)} + c_2 c_1 e^{i(\delta_1 - \delta_2)} + c_2^2$$

$e^{is} + e^{-is} = 2 \cos s \implies$ Formel für die Amplitude

(ii) Reelle Darstellung:

Anwendung der Formeln für Amplitude und Phase der harmonischen Schwingung

$$c \cos(\omega t - \delta) = (a_1 + a_2) \cos(\omega t) + (b_1 + b_2) \sin(\omega t)$$

132 / 367

Beispiel

Überlagerung der harmonischen Schwingungen

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta, \quad k = 0, \dots, n,$$

komplexe Darstellung \rightsquigarrow Überlagerung als Realteil von

$$e^{i\omega t} + e^{i(\omega t - \delta)} + \dots + e^{i(\omega t - n\delta)} = e^{i\omega t} \sum_{k=0}^n e^{-ik\delta}$$

geometrische Summe mit $q = e^{-i\delta}$ \rightsquigarrow

$$e^{i\omega t} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = e^{i\omega t} \frac{1 - (e^{-i\delta})^{n+1}}{1 - e^{-i\delta}}$$

$2i \sin \varphi = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}$ mit $\varphi = (n+1)\delta/2$ bzw. $\varphi = \delta/2$ \rightsquigarrow

$$e^{i\omega t} \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\delta} (2i \sin \frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-i\frac{\delta}{2}} (2i \sin \frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin \frac{n+1}{2}\delta}{\sin \frac{\delta}{2}} \right) e^{i(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}$$

harmonische Schwingung mit Amplitude $\sin((n+1)\delta/2)/\sin(\delta/2)$ und Phase $(n/2)\delta$

133 / 367

Modulierte Schwingung

Die Überlagerung zweier Schwingungen $c_k e^{i\omega_k t}$ lässt sich als Produkt

$$c(t) e^{i\bar{\omega} t}, \quad c(t) = c_1 e^{i\Delta\omega t} + c_2 e^{-i\Delta\omega t},$$

schreiben mit $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ und $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$.

Die resultierende sogenannte modulierte Schwingung ist nur dann periodisch, wenn das Frequenzverhältnis ω_1/ω_2 rational ist. Der Betrag der modulierten komplexen Amplitude schwankt zwischen dem minimalen und maximalen Wert $|c_1 - c_2|$ bzw. $c_1 + c_2$. Insbesondere ist

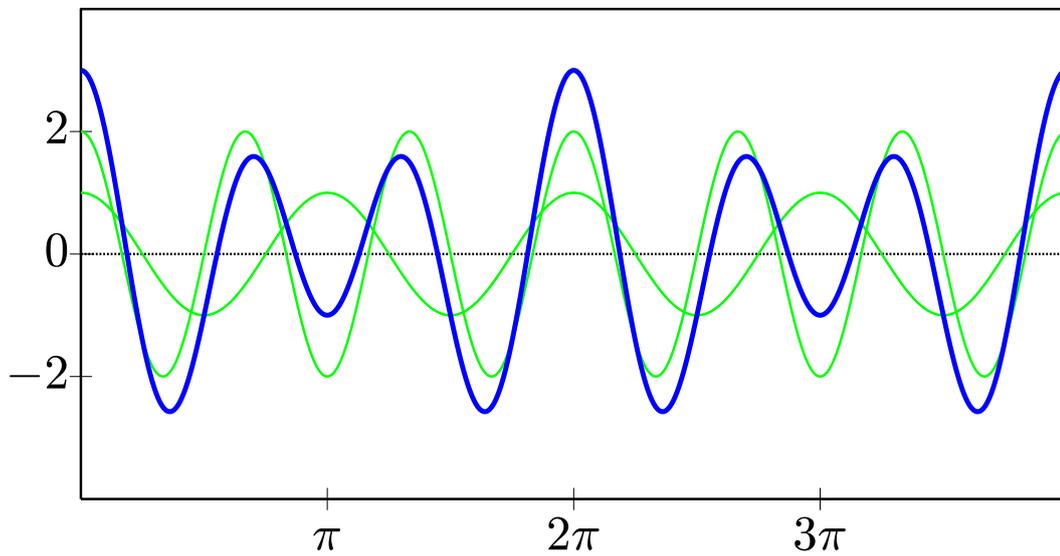
$$c(t) = 2c \cos(\Delta\omega t)$$

für gleiche Amplituden $c = c_1 = c_2$. In diesem Fall gilt für den Realteil $x(t)$ der Überlagerung

$$x(t) = c \cos(\omega_1 t) + c \cos(\omega_2 t) = 2c \cos(\Delta\omega t) \cos(\bar{\omega} t).$$

134 / 367

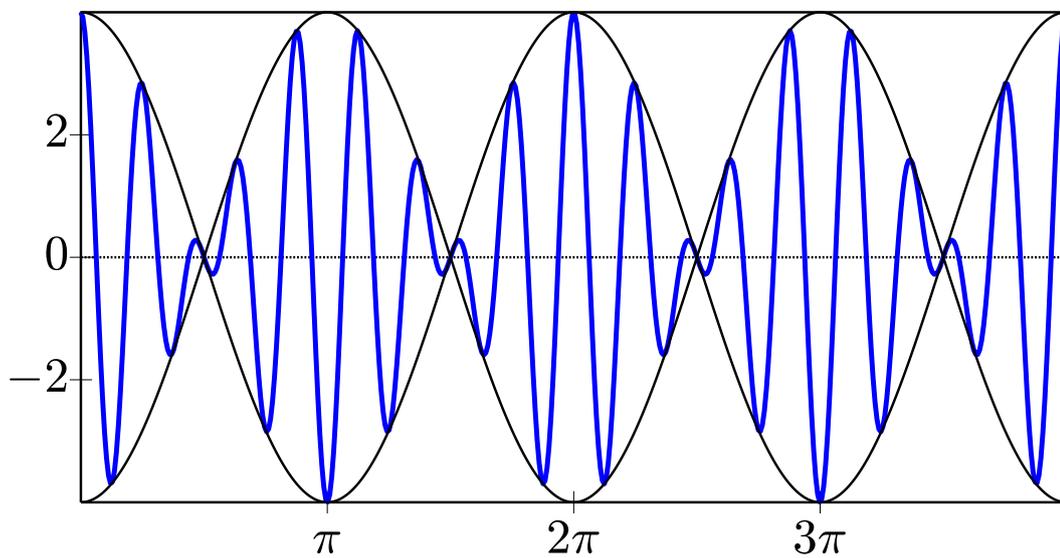
- Periodische Überlagerung



$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} (2e^{3it} + e^{2it}) \\ &= 2 \cos(3t) + \cos(2t) \end{aligned}$$

135 / 367

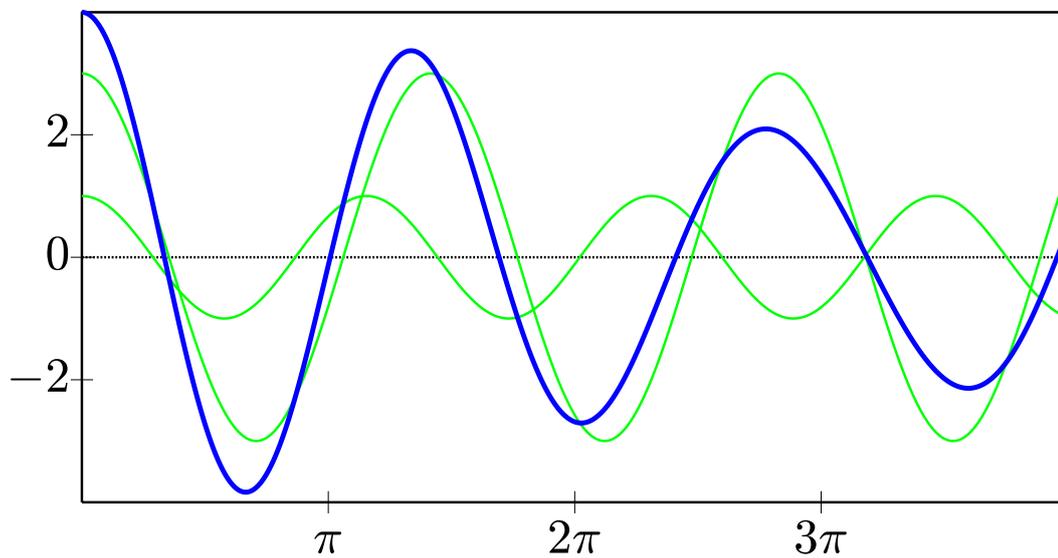
- Gleiche Amplituden



$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} (2e^{7it} + 2e^{9it}) \\ &= 2 \cos(7t) + 2 \cos(9t) = 4 \cos(t) \cos(8t) \end{aligned}$$

136 / 367

- Aperiodische Überlagerung



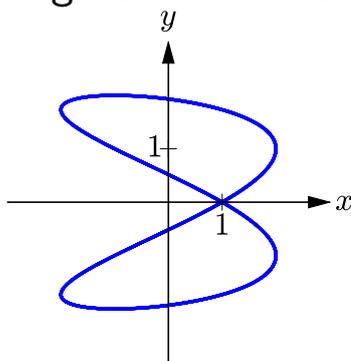
$$\begin{aligned}
 x(t) &= \operatorname{Re} \left(e^{\sqrt{3}it} + 3e^{\sqrt{2}it} \right) \\
 &= \cos(\sqrt{3}t) + 3\cos(\sqrt{2}t)
 \end{aligned}$$

Beispiel

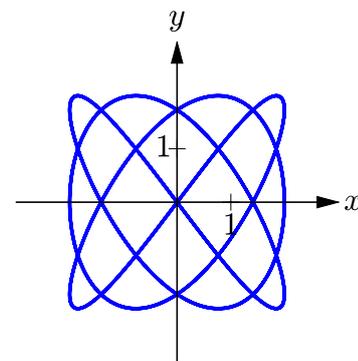
Lissajous-Figuren: Überlagerung ebener Schwingungen mit verschiedenen Schwingungsrichtungen (a_1, a_2) und (b_1, b_2) :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)$$

Lissajous-Figuren für verschiedene Parameter



$$\begin{aligned}
 a &= (2, 0), \omega_1 = 2, \delta_1 = 0 \\
 b &= (0, 2), \omega_2 = 1, \delta_2 = -\pi/3
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 a &= (2, 0), \omega_1 = 3, \delta_1 = 2 \\
 b &= (0, 2), \omega_2 = 4, \delta_2 = -1
 \end{aligned}$$

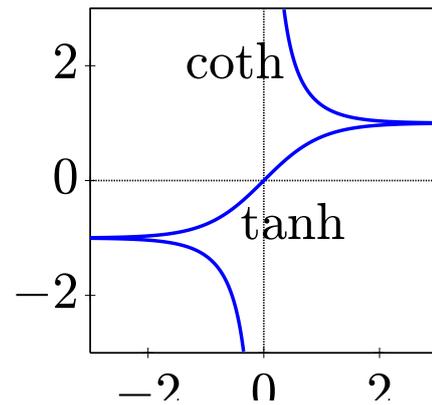
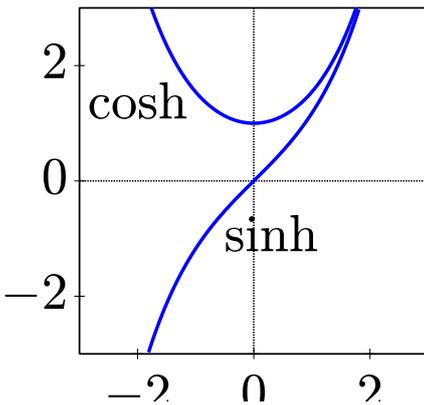
Hyperbelfunktionen

Analog zur Definition der trigonometrischen Funktionen mit Hilfe der Formel von Euler-Moivre definiert man

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

sowie

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

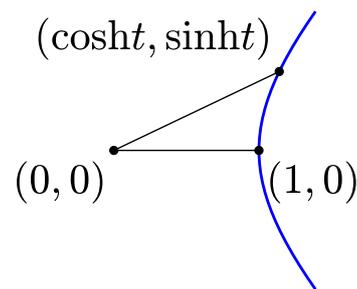
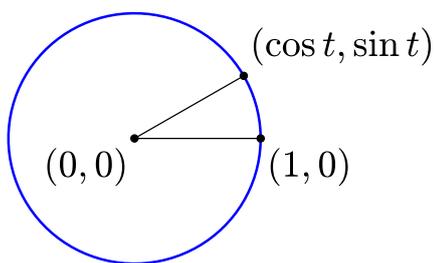


139 / 367

Die Bezeichnung Hyperbelfunktionen bezieht sich auf die Identität

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Diese impliziert, dass durch $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ ein Zweig einer Hyperbel parametrisiert wird.



Die Umkehrfunktionen lassen sich explizit angeben:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad 1 \leq x < \infty$$

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

$$\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad -\infty < x < -1 \vee 1 < x < \infty$$

140 / 367

Die Ableitungen und Stammfunktionen der Hyperbelfunktionen sind

	d/dx	$\int \dots dx$
cosh	$\sinh x$	$\sinh x + C$
sinh	$\cosh x$	$\cosh x + C$
tanh	$\cosh^{-2} x$	$\ln \cosh x + C$
coth	$-\sinh^{-2} x$	$\ln \sinh x + C$

Analog zu den trigonometrischen Funktionen gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &= -\sinh x \\ \cosh(-x) &= \cosh x \\ \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, \end{aligned}$$

die sich durch Einsetzen der Definitionen verifizieren lassen.

141 / 367

Beweis

(i) Umkehrfunktionen:

- Sinus Hyperbolicus

Multiplikation von $y = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ mit $2e^x \implies$

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

positive Lösung

$$e^x = \left[y + \sqrt{y^2 + 1} \right]$$

$$\rightsquigarrow x = \operatorname{arsinh} y = \ln[\dots]$$

- Kosinus Hyperbolicus

analog: $y = \cosh x = (e^x + e^{-x})/2 \geq 0 \implies$

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0, \quad e^x = \left[y \pm \sqrt{y^2 - 1} \right]$$

Zweig mit $x \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1$: $x = \operatorname{arcosh} y = \ln[\dots + \dots]$

$$(y \geq 1 \implies [\dots + \dots] \geq 1)$$

142 / 367

- Tangens Hyperbolicus

$$y = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Erweitern des Bruches mit e^x und Auflösen nach $z = e^{2x} \rightsquigarrow$

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad yz + y = z - 1, \quad z = \frac{1 + y}{1 - y},$$

und $x = \operatorname{artanh} y = (\ln z)/2$

- Kotangens Hyperbolicus

analog:

$$y = \operatorname{coth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{z + 1}{z - 1}, \quad z = e^{2x}$$

und

$$x = \operatorname{arcoth} y = (\ln z)/2, \quad z = \frac{y + 1}{y - 1}$$

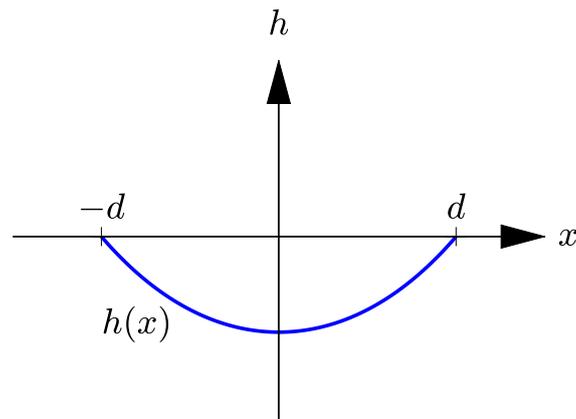
(ii) Hyperbelgleichung:

$x = \cosh t, y = \sinh t$, binomische Formel \implies

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{2} \right) \\ &= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1 \end{aligned}$$

Beispiel

Höhe h eines an den Endpunkten befestigten Kabels



physikalisches Modell \rightsquigarrow Differentialgleichung

$$h'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (h')^2}$$

145 / 367

separable Differentialgleichung erster Ordnung für $H(x) = h'(x)$

$$\frac{H'(x)}{\sqrt{1 + H(x)^2}} = \frac{1}{a}$$

$$(d/dH) \operatorname{arsinh} H = 1/\sqrt{1 + H^2} \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 + H(x)^2}} \frac{dH(x)}{dx} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 + H^2}} dH = \operatorname{arsinh} H + C,$$

d.h. Integration der Differentialgleichung \rightsquigarrow

$$\operatorname{arsinh} H(x) + C = \int \frac{1}{a} dx = \frac{x}{a} \quad \Leftrightarrow \quad H(x) = \sinh(x/a - C)$$

nochmalige Integration \rightsquigarrow

$$h(x) = a \cosh(x/a - C) + \tilde{C}$$

Randbedingungen $h(\pm d) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad C = 0, \tilde{C} = -a \cosh(d/a)$, d.h.

$$h(x) = a(\cosh(x/a) - \cosh(d/a))$$

146 / 367

Grenzwert einer Folge

Eine Folge

$$(a_n) = a_1, a_2, \dots$$

konvergiert gegen einen Grenzwert a ,

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt mit

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

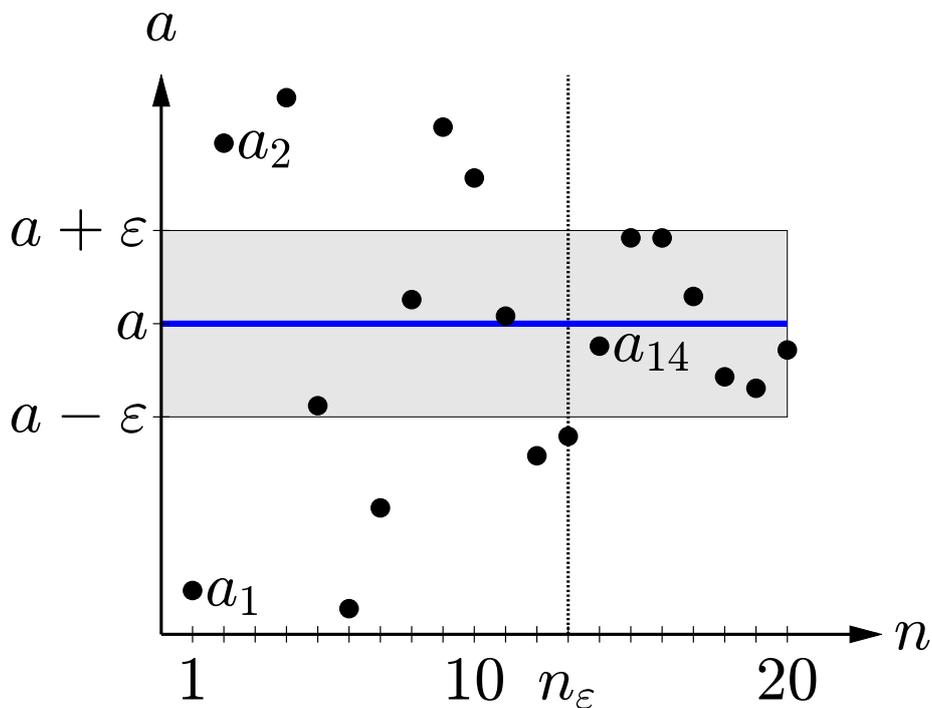
für alle $n > n_\varepsilon$.

Man benutzt ebenfalls die Schreibweise $a_n \rightarrow a$ für eine konvergente Folge.

Besitzt (a_n) keinen Grenzwert, so bezeichnet man die Folge als divergent.

In diesem Fall existiert für alle a ein $\varepsilon > 0$ mit $|a_n - a| \geq \varepsilon$ für unendlich viele n .

147 / 367



148 / 367

Beweis

Konvergenzkriterium in Quantorenschreibweise

$$\exists a \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon : |a - a_n| < \varepsilon$$

Negation (Vertauschung der Quantoren und Negation der Kernaussage)

$$\forall a \exists \varepsilon > 0 [\forall n_\varepsilon \exists n > n_\varepsilon : |a_n - a| \geq \varepsilon]$$

- [...] \iff für $n_\varepsilon = 1, 2, \dots$ existiert eine Folge $(a_{n(n_\varepsilon)})$ mit $|a_{n(n_\varepsilon)} - a| \geq \varepsilon$
- \iff unendlich viele Folgeelemente liegen außerhalb von $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Beispiel

Vorgehensweise zum Nachweis des Konvergenz-Kriteriums

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > n_\varepsilon$$

(i) Vereinfachung des Ausdrucks $|a_n - a|$ durch Abschätzung nach oben:

$$|a_n - a| \leq f(n)$$

mit einer möglichst einfachen Funktion f

(ii) Auflösen der Ungleichung $f(n) < \varepsilon$ nach n :

$$n > g(\varepsilon) = n_\varepsilon$$

$$a_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 1}, \quad \text{Grenzwert } a = 1$$

(i) Bestimmung einer Schranke f :

$$|a_n - a| = \left| \frac{n^2 + n}{n^2 + 1} - 1 \right| = \left| \frac{n - 1}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n}{n^2 + 1} < \frac{1}{n} = f(n)$$

(ii) Auflösen der Ungleichung $f(n) < \varepsilon$:

$$1/n < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > 1/\varepsilon = g(\varepsilon) = n_\varepsilon$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) mit Grenzwerten a und b gilt:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$

Beweis

(i) Summe und Differenz:

Dreiecksungleichung \implies

$$\begin{aligned} |(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| &= |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(ii) Produkt:

Dreiecksungleichung, Beschränktheit von a_n \implies

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

153 / 367

(iii) Quotient:

$n > n_0 \implies$

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2} \right) \ni b_n$$

$|b_n| \geq |b|/2 \implies$

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{bb_n} \right| \leq \frac{1}{|b|(|b|/2)} |b_n - b| \rightarrow 0,$$

d.h. $1/b_n \rightarrow 1/b$

Regel für Produkte \implies Konvergenz von a_n/b_n

154 / 367

Beispiel

Grenzwert einer rationalen Folge:

$$a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$$

mit Polynomen p und q

Bestimmung des Grenzwerts nach Kürzen durch die höchste Potenz, z.B.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n - 2}{3 + \lim_{n \rightarrow \infty} 4/n} = -\frac{2}{3}$$

Grenzwert bei Zählergrad j und Nennergrad k :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_j n^j + \dots + p_0}{q_k n^k + \dots + q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k \end{cases}$$

Divergenz für $j > k$

155 / 367

Beispiel

Berechnung des Grenzwerts der Folge $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$, $n = 1, 2, \dots$

(i) Falsche Argumentation:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1}\right)^n = 1^n = 1$$

keine konstante Anzahl der Faktoren!

(ii) Korrekte Berechnung:

benutze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

↪

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \\ &= e \cdot 1^{-1} = e \end{aligned}$$

156 / 367

Cauchy-Kriterium

Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein n_ε existiert, so dass

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

für alle $j, k > n_\varepsilon$.

Mit Hilfe dieses auf Cauchy zurückgehenden Kriteriums ist der Nachweis der Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwerts möglich.

Beweis

(i) Notwendigkeit des Cauchy-Kriteriums:

Definition des Grenzwerts \implies

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_\varepsilon$$

$$n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2} \implies$$

$$|a_j - a_k| \leq |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

für $j, k > n_\varepsilon$

(ii) Cauchy Kriterium hinreichend:

Der Beweis benutzt die Vollständigkeit der reellen Zahlen.

Beispiel

Geometrische Konvergenz (\implies Cauchy-Kriterium):

$$|a_{n+1} - a_n| \leq cq^n, \quad q \in [0, 1)$$

(i) Folgerung des Cauchy-Kriteriums aus der geometrischen Konvergenzbedingung:

Bedingung, Formel für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \implies$

$$\begin{aligned} |a_j - a_k| &\leq |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \dots + |a_{k-1} - a_k| \\ &\leq cq^j (1 + q + q^2 + \dots) \leq \frac{cq^j}{1 - q} \end{aligned}$$

für $j < k$

rechte Seite $< \varepsilon$ für $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$, denn

$$\frac{cq^j}{1 - q} < \varepsilon \iff q^j < \frac{\varepsilon(1 - q)}{c} \iff \underbrace{j \ln q}_{< 0} < \ln(\varepsilon(1 - q)/c)$$

159 / 367

(ii) Anwendung auf rekursiv definierte Folgen:

Beispiel: $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $a_0 = 1$

zeige geometrische Konvergenz mit vollständiger Induktion

Induktionsanfang ($n = 0$):

$$|a_1 - a_0| \leq c \rightsquigarrow c = |a_1 - a_0|$$

Induktionsschluss ($n \rightarrow n + 1$):

Umformung der Differenz mit Hilfe der dritten binomischen Formel

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}} \right|$$

Induktions-Voraussetzung $|a_n - a_{n-1}| \leq cq^{n-1}$, $a_k \geq 0 \rightsquigarrow$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^{n-1} = cq^n$$

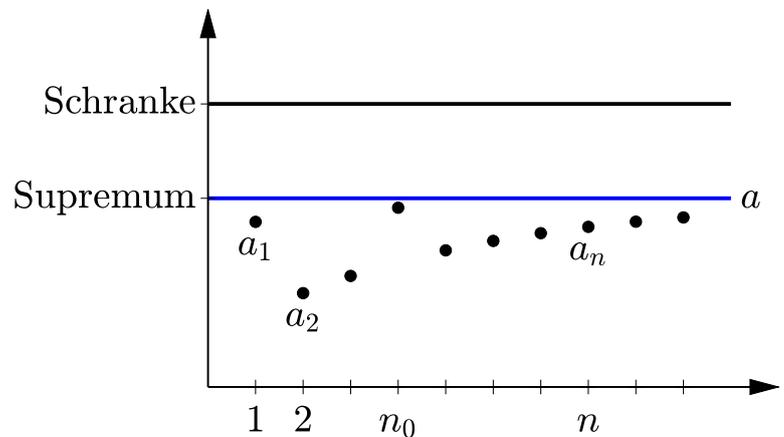
bei Wahl von $q = 1/(2\sqrt{2})$

160 / 367

Monotone Konvergenz

Eine Folge (a_n) heißt monoton wachsend bzw. monoton fallend, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ bzw. $a_{n+1} \leq a_n$ für alle n . Sie heißt streng monoton wachsend bzw. streng monoton fallend, wenn die entsprechende Ungleichung strikt ist ($>$ bzw. $<$ statt \geq bzw. \leq).

Eine beschränkte, für $n > n_0$ monoton wachsende oder fallende Folge (a_n) ist konvergent. Der Grenzwert ist das Supremum bzw. Infimum der Folgeelemente a_n , $n > n_0$.



161 / 367

Beweis

Definition des Supremums als kleinste obere Schranke \implies

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n > n_0} a_n$$

Monotonie \implies

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a \text{ für } n > n_\varepsilon,$$

also $|a_n - a| < \varepsilon$ für $n > n_\varepsilon$, d.h. $a_n \rightarrow a$

analoge Argumentation für monoton fallende Folgen

162 / 367

Beispiel

Eulersche Zahl

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{a_n} = 2.7182$$

monotone Konvergenz \rightsquigarrow Existenz des Grenzwertes

(i) Beschränktheit:

binomische Formel \rightsquigarrow

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \dots$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \leq \frac{n^k}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}$$

$$\implies a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \leq 3$$

163 / 367

(ii) Monotonie:

binomische Formel \rightsquigarrow

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1} \frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2} \frac{1}{(n+1)^2} + \dots$$

größere Terme als in der Darstellung von a_n :

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{(n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} \frac{1}{(n+1)^k} = \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k},$$

denn

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}, \quad j = 0, \dots, k-1$$

164 / 367

Uneigentlicher Grenzwert

Eine Folge (a_n) besitzt den uneigentlichen Grenzwert ∞ ($-\infty$), wenn es für alle $a > 0$ ein n_a gibt, so dass

$$a_n > a \quad (< -a)$$

für alle $n > n_a$.

Folgen, die einen uneigentlichen Grenzwert besitzen, werden auch als bestimmt divergente Folgen bezeichnet.

165 / 367

Beispiel

Uneigentlicher Grenzwert der Folge

$$a_n = \frac{n!}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

zeige $a_n \rightarrow \infty$, d.h.

$$\frac{n!}{2^n} > a \quad \text{für } n > n_a$$

Abschätzung von a_n nach unten durch einen einfacheren Ausdruck

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}$$

$\rightsquigarrow a_n > a$ für $n/4 > a$ bzw.

$$n > 4a = n_a$$

166 / 367

Limes Inferior und Limes Superior

Für jede Folge (a_n) existieren, gegebenenfalls im uneigentlichen Sinn, die Grenzwerte

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n, \quad \underline{a}_n = \inf_{k \geq n} a_k, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n, \quad \bar{a}_n = \sup_{k \geq n} a_k.\end{aligned}$$

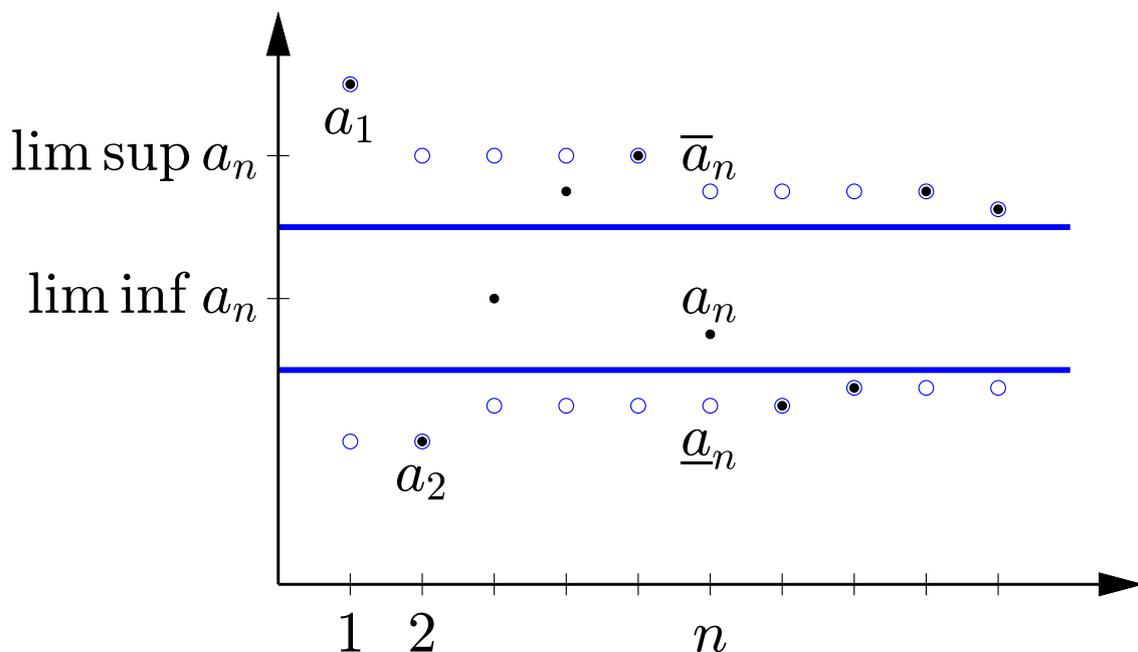
Man benutzt ebenfalls die Schreibweisen $\liminf = \underline{\lim}$ bzw. $\limsup = \overline{\lim}$. Wie in der Abbildung illustriert ist, wird die Folge (a_n) (Punkte) durch die monotonen Folgen (\underline{a}_n) und (\bar{a}_n) (Kreise) eingeschlossen:

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n.$$

Stimmen Limes Inferior und Limes Superior überein, so konvergiert die Folge (a_n) und

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

167 / 367



168 / 367

Beiweis

(i) Existenz von $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$:
monotone Konvergenz von

$$\underline{a}_n = \inf_{k \geq n} a_k, \quad \bar{a}_n = \sup_{k \geq n} a_k$$

(ii) Konvergenz bei Übereinstimmung von $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$:

- Endlicher gemeinsamer Grenzwert

$$\underline{\lim} a_n = \lim \underline{a}_n = a = \lim \bar{a}_n = \overline{\lim} a_n.$$

Definition eines Grenzwerts, Monotonie der Folgen $\underline{a}_n, \bar{a}_n \implies$

$$\begin{aligned} a - \varepsilon < \underline{a}_n \leq a, & \quad n > \underline{n}_\varepsilon \\ a \leq \bar{a}_n \leq a + \varepsilon, & \quad n > \bar{n}_\varepsilon \end{aligned}$$

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n \implies$$

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

für $n > \max(\underline{n}_\varepsilon, \bar{n}_\varepsilon)$, d.h. die Konvergenz von a_n gegen a .

169 / 367

- Uneigentlicher gemeinsamer Grenzwert: $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = \infty$
Definition des Limes Inferior \implies Konvergenz der monoton wachsenden Folge $\underline{a}_n = \inf_{m \geq n} a_m$, $n = 1, 2, \dots$, gegen ∞ , d.h.

$$\forall a \exists n_a : \underline{a}_n > a \quad \text{für } n > n_a,$$

insbesondere $\underline{a}_{n_a+1} = \inf_{m \geq n_a+1} a_m > a$

$\implies a_m > a$ für $m > n_a$ und damit folgt die Gültigkeit des Kriteriums für die Konvergenz der Folge (a_n) gegen ∞

analoge Argumentation für den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$

Vergleichskriterium

Gilt

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \quad n > n_0,$$

mit $\lim a_n = a$ und $\lim c_n = c$, so ist

$$a \leq \liminf b_n \leq \limsup b_n \leq c.$$

Insbesondere folgt aus $a = c$ die Konvergenz der Folge (b_n) :

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c.$$

171 / 367

Beweis

Grenzwertbildung erhält Ungleichungen:

$$\inf_{k \geq n} a_k \leq \inf_{k \geq n} b_k \quad \Longrightarrow \quad a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim} a_n \leq \underline{\lim} b_n$$

analog: $\overline{\lim} b_n \leq c$

$$a = c \quad \Longrightarrow$$

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

für $n > n_\varepsilon$

$$\Longrightarrow \quad |b_n - a| < \varepsilon \text{ für } n > n_\varepsilon \text{ und somit } b_n \rightarrow a$$

172 / 367

Beispiel

Anwendung des Vergleichskriteriums auf die Folge

$$b_n = \sqrt[n]{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

und Verallgemeinerungen

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

Beweis mit Vergleichskriterium, angewandt auf die Ungleichungen

$$a_n = 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} = c_n$$

unter Verwendung der bekannten Grenzwerte $\lim a_n = 1 = \lim c_n$

Begründung der rechten Ungleichung mit der binomischen Formel:

$$n \leq (1 + 2/\sqrt{n})^n = 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \dots,$$

denn

$$n - 1 \leq \frac{n-1}{2} \cdot 4 = 2(n-1)$$

173 / 367

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$:

Beweis mit der Produktregel:

$$\sqrt[n]{n^k} = (\sqrt[n]{n}) \cdots (\sqrt[n]{n}),$$

jeder der k (feste Anzahl) Faktoren strebt gegen 1

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$, $p(n) = a_k n^k + \dots + a_0$ mit $a_k > 0$:

Beweis durch Vergleich von $b_n = \sqrt[n]{p(n)}$ mit n -ten Wurzeln aus

$$p_-(n) = (a_k/2)n^k, \quad p_+(n) = (2a_k)n^k$$

Beispielsweise folgt die untere Schranke aus

$$\begin{aligned} p(n) - p_-(n) &= \frac{a_k}{2} n^k + [a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0] \\ &\geq \frac{a_k}{2} n^k - k \max_{0 \leq j < k} |a_j| n^{k-1} \geq 0 \end{aligned}$$

für

$$n \geq \frac{k \max |a_j|}{a_k/2}$$

analoge Herleitung der oberen Schranke $p(n) \leq p_+(n)$

174 / 367

Häufungspunkte einer Folge

Eine Folge (a_n) hat den Häufungspunkt a , wenn jedes Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, unendlich viele Folgeelemente enthält.

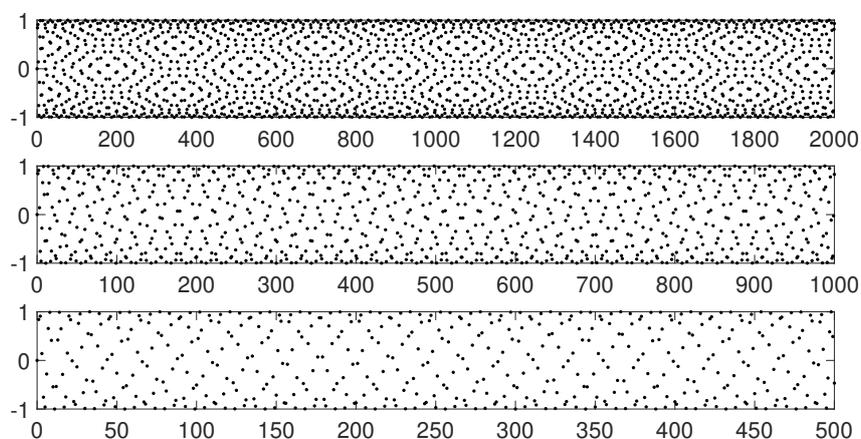
Äquivalent dazu ist die Existenz einer Teilfolge, die gegen a konvergiert. Insbesondere ist ein Grenzwert einer Folge auch ein Häufungspunkt.

175 / 367

Beispiel

Folge

$$\sin n, \quad n = 1, 2, \dots$$



annähernde Gleichverteilung der Folgeelemente a_n :
jeder Punkt in $[-1, 1]$ ist Häufungspunkt

176 / 367

Beispiel

Häufungspunkte der Folge

$$a_n = \frac{n \sin(n\pi/2)}{n + \sin(n\pi/2)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

konvergente Teilfolgen

$$\begin{aligned} b_k &= a_{2k} = \frac{0}{2k} \\ c_k &= a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1} \\ d_k &= a_{4k+3} = \frac{-(4k+3)}{(4k+3)-1} \end{aligned}$$

↪ Häufungspunkte

$$\lim b_k = 0, \quad \lim c_k = 1, \quad \lim d_k = -1$$

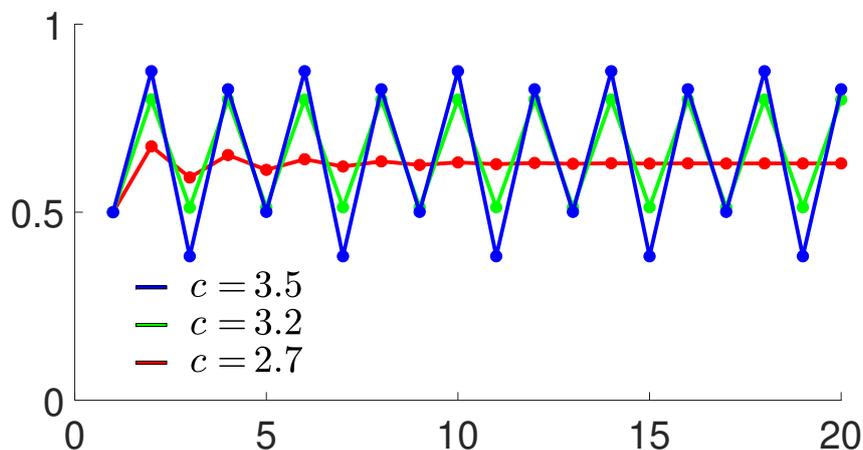
177 / 367

Beispiel

Verhulst-Modell für das Wachstum einer normierten Bevölkerungsdichte $x_n \in [0, 1]$:

$$x_{n+1} = c x_n (1 - x_n)$$

mit $c \in (0, 4]$



178 / 367

- $c \leq 3$:
Konvergenz gegen den Grenzwert

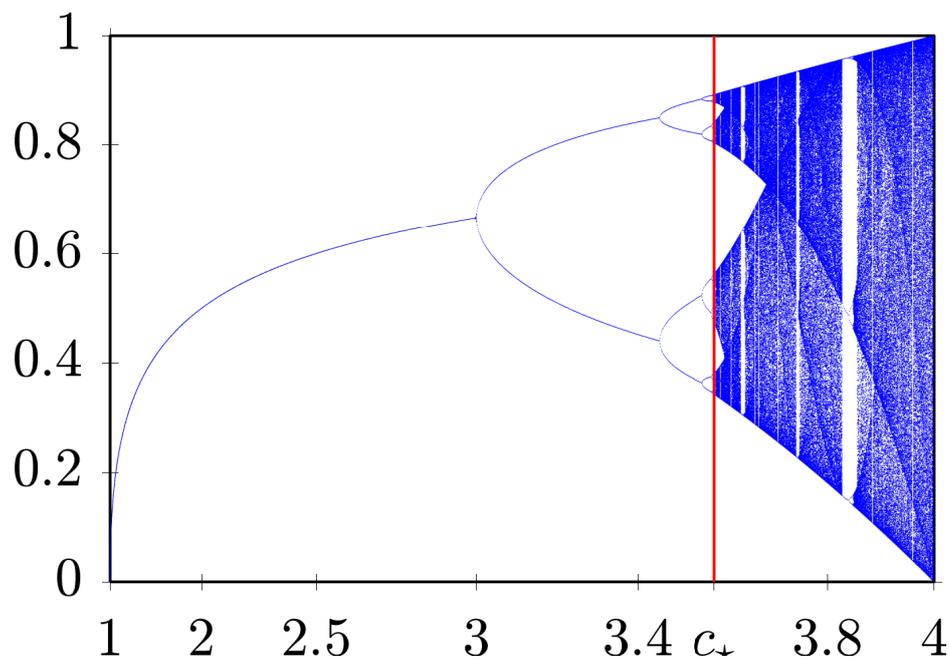
$$x_{\star} = \frac{c - 1}{c}$$

- $c > 3$:
Verdopplung der Anzahl der Häufungspunkte x_{\star} beim Überschreiten kritischer Parameterwerte c_j
Feigenbaumkonstante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4.6992 \dots$$

chaotisches Verhalten für

$$c > c^* = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3.5699 \dots$$



MATLAB-Skript zur Generierung der Grafik (vereinfacht)

```
>> Npts = 100; Nit = 1000;
>> c = 1+[0:Npts]/N; % Parameter im Intervall [1,4]
>> x = 1/2+0*c; % Startwerte
>> for n = 1:Nit
>>     x = c.*x.*(1-x) % Iterationsschritt
>>     if n>Nit/2
>>         plot(c,x,'.b'); % Zeichnen der Punkte (c(k),x(k))
>>     end
>> end
```

181 / 367

Rekursive Approximation von Pi

Die halben Umfänge a_n und b_n der um- und einbeschriebenen $(6 \cdot 2^n)$ -Ecke eines Einheitskreises genügen der Rekursion

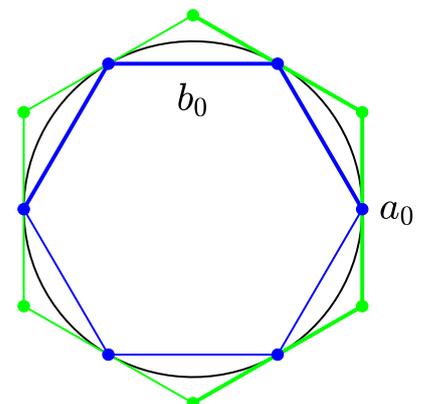
$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}, \quad a_0 = 2\sqrt{3}, \quad b_0 = 3,$$

mit deren Hilfe $\pi = 3.1415926535897932\dots$ approximiert werden kann. Diese Formeln wurden von Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) im Jahr 1800 gefunden.

Archimedes (287-212 v. Chr.) hat mit Hilfe des 96-Ecks ($n = 4$) und der Abschätzung $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$ die Relation

$$3.140845 = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857$$

gewonnen.



182 / 367

Beweis

(i) Startwerte ($n=0$):

- Einbeschriebenes Sechseck:
Seitenlänge = Radius (= 1), d.h.

$$b_0 = 3 \cdot 1$$

- Umbeschriebenes Sechseck:
Radius (= 1) = Höhe der 6 gleichseitigen Dreiecke
 \rightsquigarrow Seitenlänge

$$a = 1 / \cos 30^\circ = 2 / \sqrt{3}$$

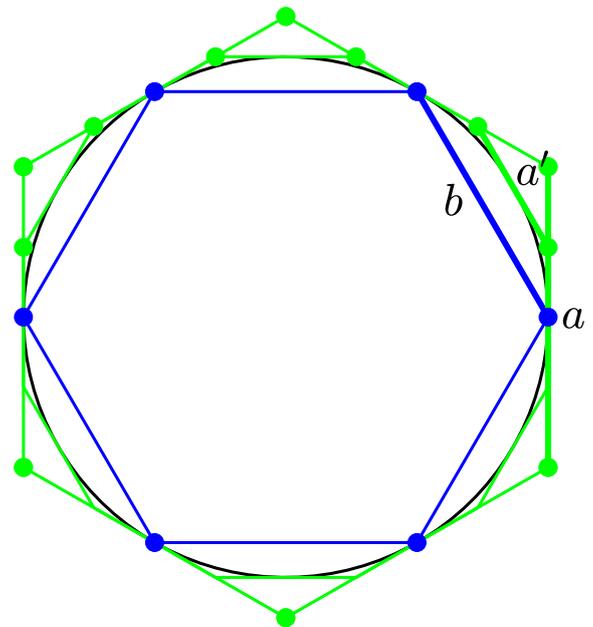
und

$$a_0 = 3a = 2\sqrt{3}$$

183 / 367

(ii) Strahlensatz, angewandt auf die Seiten a und a' der umbeschriebenen $(6 \cdot 2^n)$ - und $(6 \cdot 2^{n+1})$ -Ecke und die Seite b des einbeschriebenen $(6 \cdot 2^n)$ -Ecks:

$$\begin{aligned} a' : b &= \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2} \right) : \frac{a}{2} \\ \iff a'a &= ba - ba' \\ \iff a' &= \frac{ab}{a+b} \end{aligned}$$



184 / 367

(iii) Rekursion:

$$a_n = k_n a, \quad b_n = k_n b \quad \text{mit} \quad k_n = 3 \cdot 2^n \quad \implies$$

$$a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b} = 2 \frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

Winkel der $4k_n$ rechtwinkligen Teildreiecke der $(2k_n)$ -Ecke: $2\pi/(4k_n)$

$\rightsquigarrow (a/2) : 1 = \tan(\pi/(2k_n)), (b/2) : 1 = \sin(\pi/(2k_n))$ und

$$a_n = k_n \cdot 2 \tan(\pi/(2k_n)), \quad b_n = k_n \cdot 2 \sin(\pi/(2k_n))$$

Umformung (verwendet $\tan t \cos t = \sin t, \sin(2t) = 2 \sin t \cos t$) \implies

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 &= \underbrace{(2k_n)^2}_{k_{n+1}} \cdot 4 \sin^2(\pi/(4k_n)) \\ &= \underbrace{2k_n \cdot 2 \tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) \cdot 2k_n \cdot 2 \sin(\pi/(4k_n))}_{k_n \cdot 2 \sin(\pi/(2k_n)) = b_n} \\ &= a_{n+1} b_n \end{aligned}$$

Berechnung von Pi

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	$3 + \frac{1}{8}$
Archimedes	250	v. Chr.	3	$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$
Liu Hui	263		5	3.1415
Tsu Ch'ung Chi	480		7	3.141592
Al-Kashi	1429		14	3.1415926535897
Romanus	1593		15	3.14159265358979
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	

Autor	Jahr	korr. Stellen	Wert
Shanks	1874	527	
Smith/Wrench	1949	1 120	
Reitwiesner u.a.	1949	2 037	
Genuys	1958	10 000	
Shanks/Wrench	1961	100 265	
Guilloud/Filliatre	1966	250 000	
Guilloud/Dichamp	1967	500 000	
Guilloud/Bouyer	1973	1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982	16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987	134 217 700	
Chudnovskys	1989	1 011 196 691	

Spezielle Grenzwerte von Folgen

Einige wichtige Grenzwerte sind in der folgenden Tabelle angegeben.

a_n	$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^s q^n, q < 1$	0
$n^{-s} \ln n, s > 0$	0
$q^n / n!$	0
$n! / n^n$	0
$(1 + 1/n)^n$	e
$(1 - 1/n)^n$	1/e

Beispiel

Anwendung von Grenzwertregeln und Benutzung bekannter Grenzwerte

(i) Grenzwert der Folge $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}$, $n = 1, 2, \dots$:
setze $m = 2n + 3$, $n = (m - 3)/2$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}$$

↪

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)\right)^{-6} \\ &= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2\end{aligned}$$

189 / 367

(ii) Grenzwert der Folge

$$a_n = \binom{3n}{n} / 2^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Umformung ↪

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{(3n)(3n-1) \cdots (2n+1)}{n \cdot (n-1) \cdots 1} \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{3-1/n}{2} \cdots \frac{2+1/n}{2} \right] \cdot \frac{n^n}{n!}\end{aligned}$$

$[\dots] \geq 1 \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$$

190 / 367

Beispiel

Berechnung von Grenzwerten der Form

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

durch Division durch die betragsmäßig größeren Ausdrücke

z.B: Umformung von

$$a_n = \frac{(3 + \sqrt{n+4})^2}{5n + \ln n}$$

binomische Formel und Kürzen durch $n \rightsquigarrow$

$$\frac{9 + 6\sqrt{n+4} + n + 4}{5n + \ln n} = \frac{13/n + 6\sqrt{1/n + 4/n^2} + 1}{5 + (\ln n)/n}$$

$1/n, 1/n^2, (\ln n)/n \rightarrow 0 \implies$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{0 + 6 \cdot \sqrt{0} + 1}{5 + 0} = \frac{1}{5}$$

191 / 367

Grenzwert einer Reihe

Eine Summe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit unendlich vielen Summanden bezeichnet man als Reihe. Sie konvergiert gegen einen Grenzwert

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

wenn die Folge (s_n) der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

gegen s konvergiert. Existiert kein Grenzwert, so bezeichnet man die Reihe als divergent.

Der Grenzwert kann von der Reihenfolge der Summanden abhängen, bzw. braucht nach dem Umordnen nicht mehr zu existieren. Notwendig für die Konvergenz einer Reihe ist, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

192 / 367

Beispiel

Berechnung und Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$$

(i) Explizite Berechnung:

Partialbruchzerlegung \rightsquigarrow

$$a_n = \frac{2}{n^2 - 1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$$

Umwandlung der Reihe

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots$$

Grenzwert $\sum_n a_n = 3/2$ wegen Aufhebung aller Terme außer $1/1$ und $1/2$

193 / 367

(ii) Konvergenz:

Differenz der Partialsummen

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &= \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \right| < \frac{4}{n} \end{aligned}$$

wegen Aufhebung der mittleren Terme

\rightsquigarrow Cauchy-Konvergenz:

$$|s_n - s_m| < \varepsilon \quad \text{für } n > \frac{4}{\varepsilon}$$

Differenz zum Grenzwert

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2} - s_n \right| &= \left| \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) + \dots \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right| < \frac{2}{n} \end{aligned}$$

194 / 367

(iii) Divergenz bei Umordnung:
Reihe nach Partialbruchzerlegung

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

andere Gruppierung

$$\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{5}\right) + \dots$$

$$(\dots) \geq 2^n / (2^{n+1} - 1) - 1 / (n + 3) \geq 1/2 - 1/3 \rightsquigarrow \text{Divergenz}$$

Geometrische Reihe

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert genau, dann wenn $|q| < 1$.

Mit der geometrischen Summenformel

$$s_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

lässt sich der Grenzwert explizit berechnen:

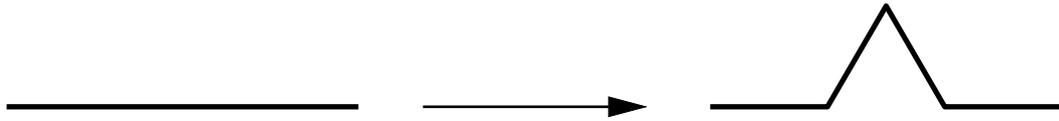
$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - q}$$

für $|q| < 1$.

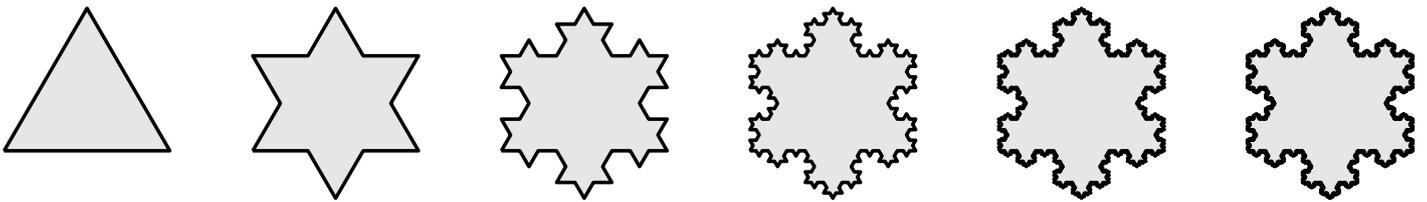
Beispiel

Koch-Schneeflocke:

fraktale Menge generiert durch iterative Modifikation von Kanten



Ersetzen von jeder Kante durch vier neue Kanten mit einem Drittel der Länge in jedem Schritt



n -te Schneeflocke: $3 \cdot 4^n$ Kanten mit Länge 3^{-n}

197 / 367

(i) Umfang:

$$\text{Kantenzahl} \cdot \text{Kantenlänge} = (3 \cdot 4^n) (3^{-n}) = 3 \left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow \infty$$

Divergenz \rightsquigarrow fraktaler Rand

(ii) Flächeninhalt:

Fläche: Vereinigung gleichseitiger Dreiecke (Flächeninhalt $(\sqrt{3}/4) a^2$ bei Seitenlänge a)

n -ter Schritt: zusätzlich $3 \cdot 4^{n-1}$ gleichseitige Dreiecke mit Kantenlängen 3^{-n} und Flächeninhalten $(\sqrt{3}/4) (3^{-n})^2$

\rightsquigarrow Gesamtfläche nach n Schritten

$$\frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{k=1}^n \left(3 \cdot 4^{k-1} \frac{\sqrt{3}}{4} (3^{-k})^2 \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{4^{k-1}}{9^{k-1}} \right)$$

$n \rightarrow \infty \rightsquigarrow$ geometrische Reihe mit Grenzwert

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (4/9)^k \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 4/9} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.6928$$

198 / 367

Harmonische Reihe

Die harmonische Reihe

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

divergiert bzw. hat den uneigentlichen Grenzwert $s = \infty$.

Allgemeiner ist die Reihe

$$s_r = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}$$

für $r \leq 1$ divergent und für $r > 1$ konvergent.

Einige spezielle Werte sind

$$s_2 = \pi^2/6, \quad s_4 = \pi^4/90, \quad s_6 = \pi^6/945.$$

Absolute Konvergenz

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

so bezeichnet man $\sum_n a_n$ als absolut konvergent.

Aus dieser stärkeren Form der Konvergenz folgt, dass die Reihe auch bei einer beliebigen Änderung der Summationsreihenfolge konvergent ist.

Beweis

(i) Konvergenz:

Cauchy-Kriterium, angewandt auf die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^n |a_k| \quad \implies$$

$$\exists n_\varepsilon : |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon \quad \text{für } n, m > n_\varepsilon \quad (n < m)$$

Dreiecksungleichung \rightsquigarrow Abschätzung für die Differenzen der Partialsummen:

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon \quad \text{für } n, m > n_\varepsilon$$

$$\implies \text{Konvergenz von } \sum_k a_k$$

201 / 367

(ii) Konvergenz nach Umordnung:

Beschreibung einer Änderung der Summationsreihenfolge durch eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \rightsquigarrow$ Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k, \quad \tilde{a}_k = a_{f(k)}$$

indirekter Beweis der behaupteten Konvergenz von $\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^n |\tilde{a}_k|$, d.h.

$$\underbrace{(\text{Konvergenz von } s_n)}_{\text{Voraussetzung}} \wedge \underbrace{(\text{Divergenz von } \tilde{s}_n)}_{\text{negierte Behauptung}} \implies \text{Widerspruch}$$

Divergenz von $\tilde{s}_n \iff$ Unbeschränktheit der Folge $\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots$

$$\tilde{s}_n = |a_{f(1)}| + \cdots + |a_{f(n)}| \geq s_{N(n)} = |a_1| + \cdots + |a_{N(n)}|, \quad N(n) = \max_{k \leq n} f(k)$$

\implies Unbeschränktheit der Teilfolge $s_{N(1)}, s_{N(2)}, \dots$ der Partialsummen von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$

\implies Widerspruch zur vorausgesetzten absoluten Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

202 / 367

Ist

$$|a_n| \leq c|b_n| \quad \text{für } n \geq n_0$$

mit einer Konstanten c , so folgt aus der absoluten Konvergenz von $\sum_n b_n$ die absolute Konvergenz von $\sum_n a_n$.

Gilt umgekehrt $|a_n| \geq c|b_n|$ mit $c > 0$ für alle bis auf endlich viele n , so folgt aus der Divergenz von $\sum_n |b_n|$, dass auch $\sum_n a_n$ nicht absolut konvergent ist.

Häufig werden die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-r},$$

die für $0 < q < 1$ bzw. $1 < r$ absolut konvergent sind, als Vergleichsreihen benutzt.

Beispiel

Nachweis von Konvergenz bzw. Divergenz durch Vergleich mit der geometrischen und harmonischen Reihe

(i) Majorante für $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$:

Vergleich mit der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = 1/2 \implies$
Konvergenz:

$$a_n = \left(\frac{(2n)!}{(2n-n)! n!} \right)^{-1} = \frac{n!}{(2n)! / n!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \leq 2^{-n}$$

(ii) Minorante für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1000}$:

Vergleich mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n \implies$ Divergenz:

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}, \quad n > n_0 = 9$$

Quotientenkriterium

Ist $a_n \neq 0$ für $n > n_0$ und existiert $q \in (0, 1)$ mit

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q, \quad n > n_0,$$

so ist $\sum a_n$ absolut konvergent. Gilt hingegen

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1, \quad n > n_0,$$

so ist $\sum a_n$ divergent.

Das hinreichende Kriterium für Konvergenz lässt sich auch in der äquivalenten Form

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

schreiben.

205 / 367

Man beachte, dass die hinreichende Konvergenz-Bedingung restriktiver als die Ungleichung

$$|a_{n+1}| < |a_n|, \quad n > n_0,$$

ist, aufgrund derer keine Aussage möglich ist.

206 / 367

Beweis

(i) Konvergenz:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \quad \text{für } n > n_0$$

\implies

$$|a_{n_0+k}| \leq q |a_{n_0+k-1}| \leq \dots \leq q^{k-1} |a_{n_0+1}| = c(q, n_0) q^{n_0+k}$$

geometrische Reihe als Majorante

(ii) Divergenz:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{für } n > n_0$$

\implies

$$0 < |a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0+2}| \leq \dots$$

keine Nullfolge der Summanden

Beispiel

Anwendung des Quotientenkriteriums bei Reihen mit Summanden aus Fakultäten und Potenzen anhand der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n / \binom{2n}{n}$$

Quotienten der Summanden

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1} (n+1)! (n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n n! n!} = \frac{3 \cdot (n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

Grenzwert $q = 3/4 < 1$ für $n \rightarrow \infty \implies$ Konvergenz

Die direkte Abschätzung der Summanden

$$a_n = \frac{3 \cdot 6 \cdots 3n}{(n+1)(n+2) \cdots (2n)} = \prod_{k=1}^n \frac{3k}{n+k}$$

ist schwieriger (Faktoren sowohl kleiner als auch größer als 1).

Wurzelkriterium

Existiert $q \in [0, 1)$ mit

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q, \quad n > n_0,$$

so ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Ist hingegen

$$|a_n| \geq 1$$

für unendlich viele n , so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Die hinreichende Bedingung für Konvergenz lässt sich auch in der äquivalenten Form

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

schreiben.

Der Grenzwert der n -ten Wurzeln muss nicht existieren; die etwas stärkere Forderung $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ist natürlich ebenfalls hinreichend für die Konvergenz der Reihe.

209 / 367

Beweis

(i) Konvergenz:

$$|a_n| \leq q^n \quad \text{mit} \quad q < 1 \quad \text{für} \quad n > n_0$$

\implies geometrische Reihe als Majorante

(ii) Limes Superior:

Definition: $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{b}_n$, $\bar{b}_n = \sup_{k \geq n} b_k$

(\bar{b}_n) monoton fallend \implies

$$\lim_n \bar{b}_n < 1 \iff \bar{b}_n < 1, n > n_0 \iff \sup_{n > n_0} b_n < 1$$

$b_n = \sqrt[n]{|a_n|} \implies$ Äquivalenz der Konvergenzkriterien

(iii) Divergenz:

$$|a_n| \geq 1 \quad \text{für unendlich viele} \quad n$$

$\implies a_1, a_2, \dots$ ist keine Nullfolge

210 / 367

Beispiel

Anwendung des Wurzelkriteriums bei Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, die n -te Potenzen enthalten

(i) $a_n = n(-2)^{-n}$:

n -te Wurzeln $w_n = \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n} 2^{-1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\implies w_n \rightarrow 1/2 < 1$ und somit absolute Konvergenz nach dem Wurzelkriterium

allgemeinere Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} n^r x^{-n}$, $w_n = (\sqrt[n]{n})^r / |x| \rightarrow 1/|x|$

Wurzelkriterium \implies

- Konvergenz für $1/|x| < 1$, d.h. $|x| > 1$

Divergenz für $|x| < 1$

- keine Aussage für $|x| = 1$

andere Methode \rightsquigarrow

Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^r$ ($x = 1$) für $r < -1$,

Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^r (-1)^n$ ($x = -1$) für $r < 0$

211 / 367

(ii) $a_n = (3 + \sin n)^{-n}$:

kein Grenzwert der n -ten Wurzeln $w_n = \sqrt[n]{|a_n|} = |3 + \sin n|^{-1}$

\rightsquigarrow Notwendigkeit des Limes Superior:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} |3 + \sin k|^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-1} = 1/2 \implies \text{Konvergenz}$$

einfacher: unmittelbare Anwendung der Abschätzung

$$w_n \leq |3 - 1|^{-1} = 1/2 < 1$$

(erste Variante der Wurzelkriterien)

212 / 367

Die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \dots$$

konvergiert, falls (a_k) eine monotone Nullfolge ist.
Für den Reihenrest gilt

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq |a_{n+1}|.$$

Der Betrag einer alternierenden Summe kann also immer durch den Betrag des ersten Summanden abgeschätzt werden.

Beweis

Die Gültigkeit des Cauchy-Kriteriums folgt aus folgender Abschätzung für die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \dots \pm a_m| \leq |a_{n+1}| \quad (m > n)$$

$m \rightarrow \infty \rightsquigarrow$ Abschätzung für den Reihenrest

Beweis dieser Ungleichung (o.B.d.A. $a_{n+1} \geq 0$)

(i) Obere Schranke:

$$s_m - s_n = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \dots \leq a_{n+1}$$

(letzter Term $-(a_m)$ oder $-(a_{m-1} - a_m)$)

(ii) Untere Schranke:

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \dots \geq 0 \geq -a_{n+1}$$

Illustration der Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums

(i) Alternierende harmonische Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$$

Leibniz-Kriteriums anwendbar, da $a_n = 1/n$, $n = 1, 2, \dots$, eine monotone Nullfolge ist

Abschätzung des Reihenrestes

$$\left| \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2 \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

(ii) Notwendigkeit der Voraussetzungen des Leibniz-Kriteriums:

- Divergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \dots,$$

da $a_n = (n+1)/n$ keine Nullfolge ist

Cauchy-Kriterium verletzt:

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

- Divergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \dots,$$

da der Betrag der Summanden nicht monoton ist

Minorante $\sum_n 1/n$ bei Zusammenfassen von je 2 Summanden:

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \frac{n-1}{(2n-1)(2n)} \geq \frac{1}{8n}, \quad n > 1$$

Die Eulersche Zahl

$$e = 2.71828182845905 \dots$$

lässt sich als Grenzwert einer Folge und einer Reihe darstellen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Beweis

(i) Konvergenz der Reihe:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2} = 2^{1-n}$$

⇒ Majorisierung durch eine geometrische Reihe

⇒ Existenz des Grenzwerts

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

(ii) Obere Abschätzung für die Folge:

Für $n \geq k \geq 0$ gilt

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \leq \frac{1}{k!}$$

binomische Formel ⇒

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e$$

Grenzwertbildung $\rightsquigarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \leq e$

(iii) Untere Abschätzung für die Folge:

Für $n > N$ mit N beliebig aber fest gewählt gilt

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{n-N}{n} \right)^N$$

Grenzwertbildung \rightsquigarrow

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{N}{n} \right)^N = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}$$

$N \rightarrow \infty$: rechte Seite $\rightarrow e$, d.h. $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \geq e$

(iv) Kombination der Abschätzungen:

bereits gezeigt

$$\underline{\lim} a_n \geq e, \quad e \geq \overline{\lim} a_n$$

Wegen $\underline{\lim} a_n \leq \overline{\lim} a_n$ folgt

$$\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n$$

und damit $a_n \rightarrow e$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \dots = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \dots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \dots = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots = \ln 2$$

Stetigkeit

Eine Funktion f ist stetig im Punkt a , wenn für alle Folgen (x_n) mit Grenzwert a die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergieren:

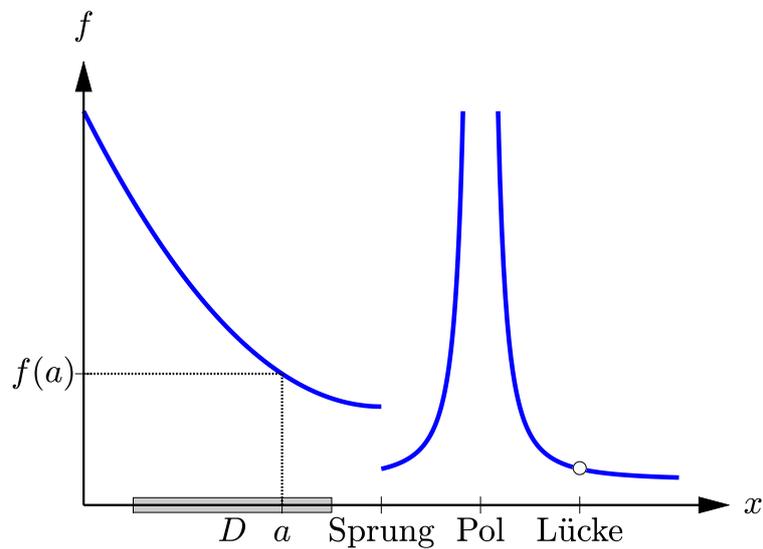
$$x_n \rightarrow a \quad \implies \quad f(x_n) \rightarrow f(a).$$

Nach Definition des Grenzwerts gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein δ_ε mit

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad |x - a| < \delta_\varepsilon,$$

und man schreibt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Man bezeichnet a als hebbare Definitionslücke, wenn f in einer Umgebung von a definiert ist und der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert, die Funktion f also stetig ergänzt werden kann.

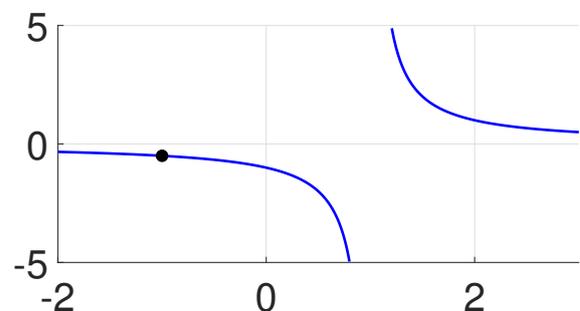
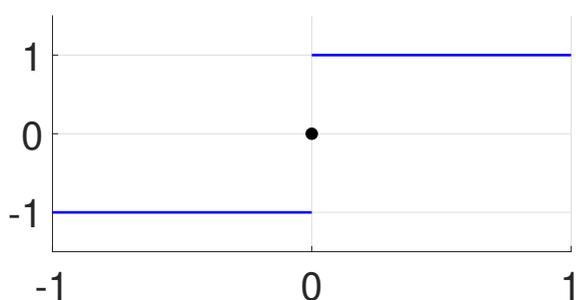


Eine Funktion ist stetig auf einem Intervall D , wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist. Dies bedeutet, dass der Graph von f zusammenhängend ist, die Funktion besitzt keine Sprung- oder Polstellen. Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass sich der Graph ohne abzusetzen zeichnen lässt.

Beispiel

Verschiedene Typen von Unstetigkeitsstellen

Signum-Funktion $f(x) = \text{sign}(x)$ Rationale Funktion $g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$



- $f(x) = \text{sign}(x)$:
Sprung bei 0, Funktionswert $\text{sign}(0) = 0$, kein Grenzwert von $\text{sign}(x)$ für $x \rightarrow 0$
- $g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$:
Definitionslücken bei $x = \pm 1$
Polstelle bei $x = 1$:

$$x \rightarrow 1 \implies |g(x)| \rightarrow \infty$$

hebbare Definitionslücke bei $x = -1$:

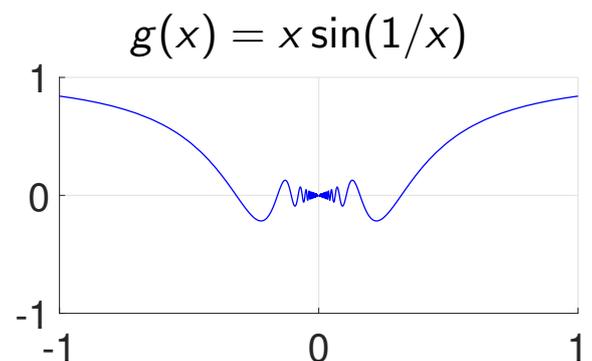
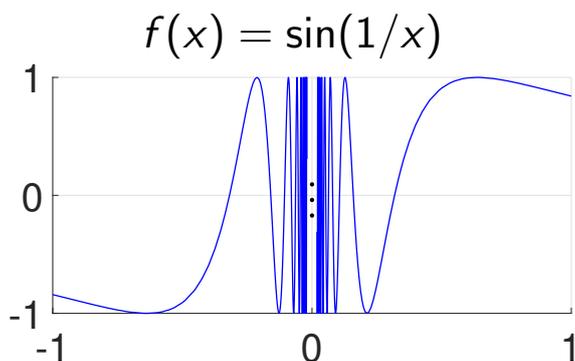
$$g(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}, \quad x \neq -1$$

Nach Ergänzen des Funktionswertes $g(-1) = -\frac{1}{2}$ ist g stetig bei $x = -1$.

Beispiel

Verschiedene Typen von Unstetigkeitsstellen

- $f(x) = \sin(1/x)$: unstetig bei $x = 0$ wegen Oszillationen zwischen ± 1
- $g(x) = x \sin(1/x)$: hebbare Definitionslücke bei $x = 0$
 $0 \leq |g(x)| \leq |x| \rightsquigarrow$ stetige Ergänzung $g(0) = 0$



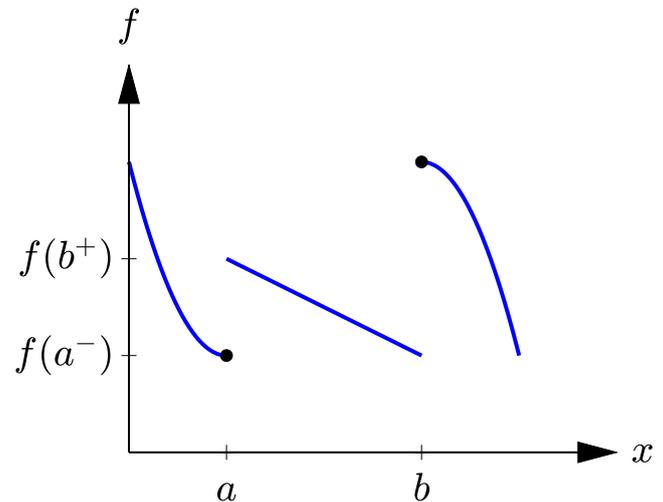
Einseitige Stetigkeit

Analog zur Stetigkeit definiert man links- bzw. rechtsseitige Stetigkeit

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f^-(a), \quad \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f^+(b),$$

indem man nur Argumente x auf der entsprechenden Seite von a betrachtet.

Ist an einer Sprungstelle von f ein Funktionswert definiert, so wird dieser im Allgemeinen durch einen fett gezeichneten Punkt im Graphen hervorgehoben, um anzudeuten, ob er mit dem links- oder rechtsseitigen Grenzwert übereinstimmt.



227 / 367

Regeln für stetige Funktionen

Für in einem Punkt a stetige Funktionen f und g sind

$$rf \quad (r \in \mathbb{R})$$

$$f \pm g$$

$$fg$$

$$f/g \quad (\text{falls } g(a) \neq 0)$$

$$f \circ g$$

in a stetig.

Entsprechendes gilt für auf einem Intervall D stetige Funktionen sowie für links- und rechtsseitige Stetigkeitsstellen.

228 / 367

Beweis

Herleitung durch Anwenden der entsprechenden Regeln für Grenzwerte
betrachte beispielsweise die Komposition stetiger Funktionen
Stetigkeit von g :

$$x_n \rightarrow a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(a)$$

Stetigkeit von f :

$$y_n \rightarrow y \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(y)$$

wähle $y_n = g(x_n)$ mit $x_n \rightarrow a$

\rightsquigarrow Stetigkeit von $f \circ g$:

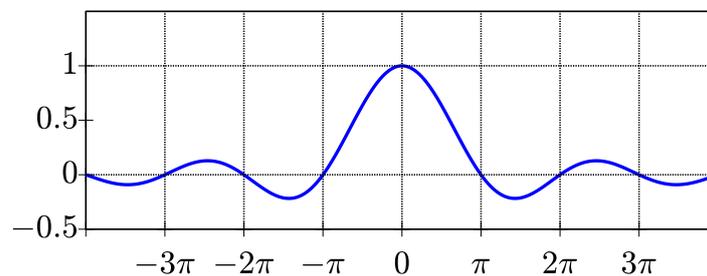
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(y) = f(g(x))$$

229 / 367

Beispiel

Stetigkeit der sinc-Funktion

$$f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$



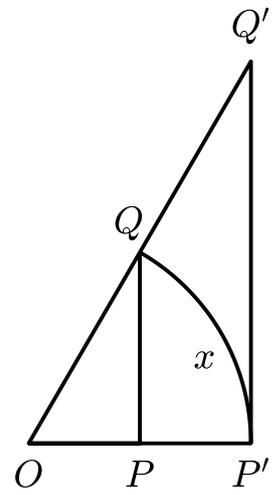
(i) Regeln für stetige Funktionen \Longrightarrow Stetigkeit des Quotienten für $x \neq 0$ (Nullstelle des Nenners)

230 / 367

(ii) Beweis der Stetigkeit bei $x = 0$

Vergleich der Flächeninhalte

- des Dreiecks $D_- = \triangle(O, P, Q)$ mit Seitenlängen $|\overline{OP}| = \cos x$, $|\overline{PQ}| = \sin x$,
- des Kreissektors S mit Radius $|\overline{OQ}| = 1$ und Bogenlänge (Winkel) x ,
- des Dreiecks $D_+ = \triangle(O, P', Q')$ mit Seitenlängen $|\overline{OP'}| = 1$, $|\overline{P'Q'}| = \tan x$



\rightsquigarrow

$$\underbrace{\frac{\sin x \cos x}{2}}_{\text{area } D_-} \leq \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{area } S} \leq \underbrace{\frac{\tan x}{2}}_{\text{area } D_+}$$

Division durch $\sin x/2$ und Kehrwertbildung \implies

$$\frac{1}{\cos x} \geq \text{sinc } x \geq \cos x$$

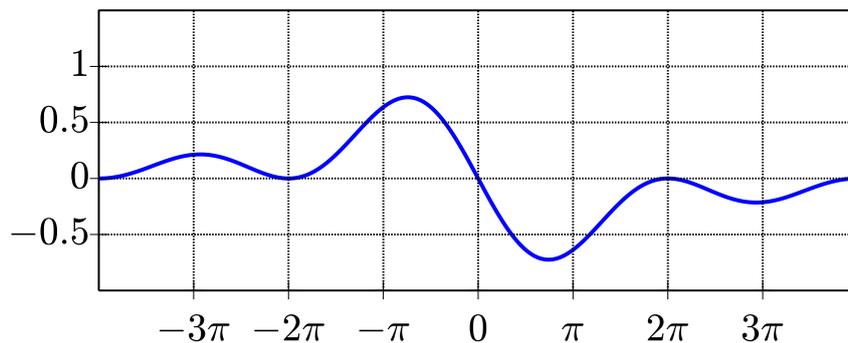
Vergleichskriterium und $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \text{sinc } x = 1$

231 / 367

Beispiel

Stetigkeit der Funktion

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$



(i) Regeln für stetige Funktionen \implies Stetigkeit des Quotienten für $x \neq 0$ (Nullstelle des Nenners)

232 / 367

(ii) Stetige Fortsetzbarkeit für $x \rightarrow 0$:

Umformung \rightsquigarrow

$$\begin{aligned}\frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x + 1} \sin x\end{aligned}$$

Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

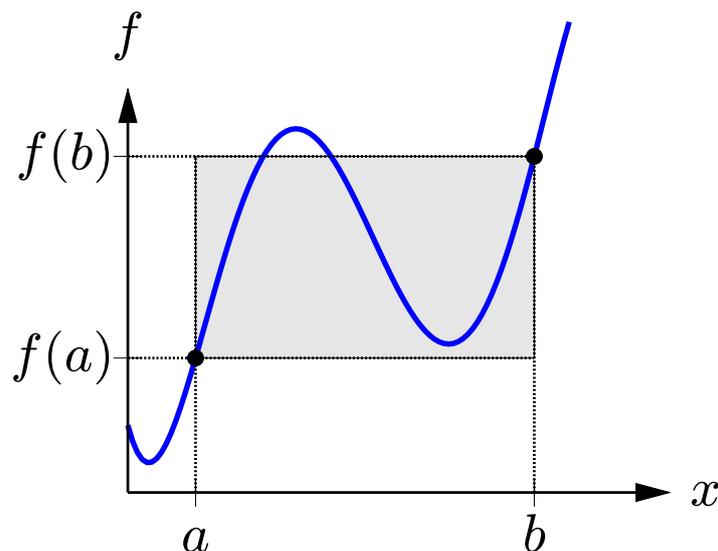
\rightsquigarrow

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

233 / 367

Zwischenwertsatz

Eine stetige Funktion f nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

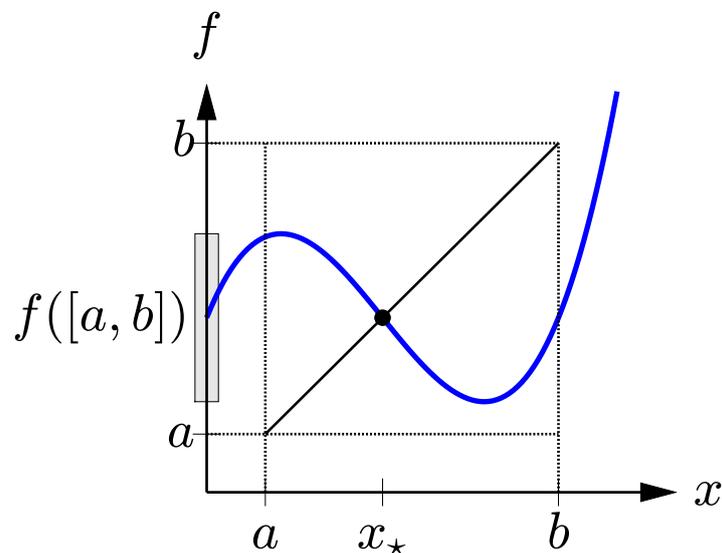


234 / 367

Fixpunktsatz für stetige Funktionen

Bildet eine Funktion f das Intervall $[a, b]$ stetig in $[a, b]$ ab, so existiert in diesem Intervall ein Fixpunkt x_* :

$$x_* = f(x_*) \in [a, b].$$



235 / 367

Beweis

betrachte

$$g(x) = f(x) - x$$

$$g(a) \geq 0, g(b) \leq 0 \quad \implies$$

$$\exists x_* \in [a, b] : g(x_*) = 0$$

aufgrund des Zwischenwertsatzes

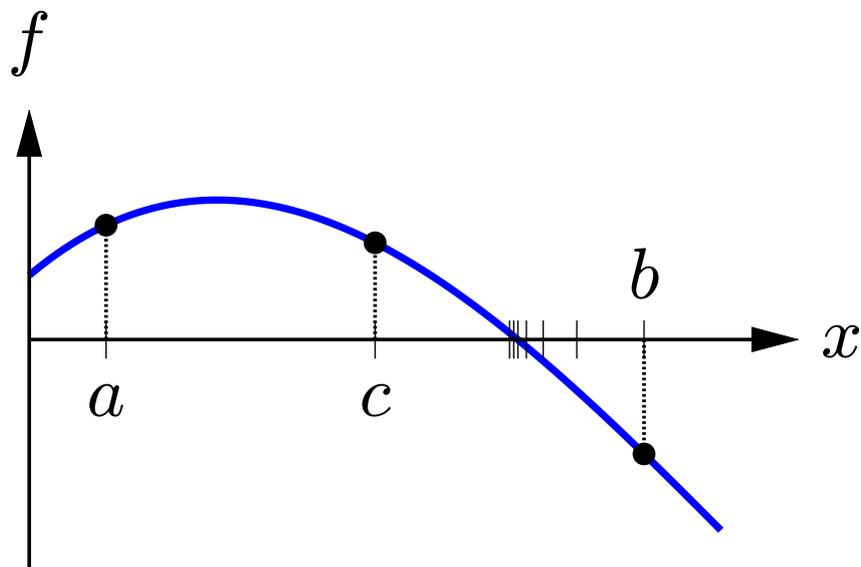
\implies Existenz eines Fixpunktes:

$$g(x_*) = 0 \quad \iff \quad f(x_*) = x_*$$

236 / 367

Bisektionsverfahren

Nach dem Zwischenwertsatz besitzt eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(a)f(b) < 0$ mindestens eine Nullstelle im Intervall (a, b) .



237 / 367

Halbiert man das Intervall und wertet f an der Intervallmitte

$$c = \frac{a + b}{2}$$

aus, so kann man für $f(c) \neq 0$ mit Hilfe des Vorzeichens entscheiden, in welchem Teilintervall eine Nullstelle liegen muss:

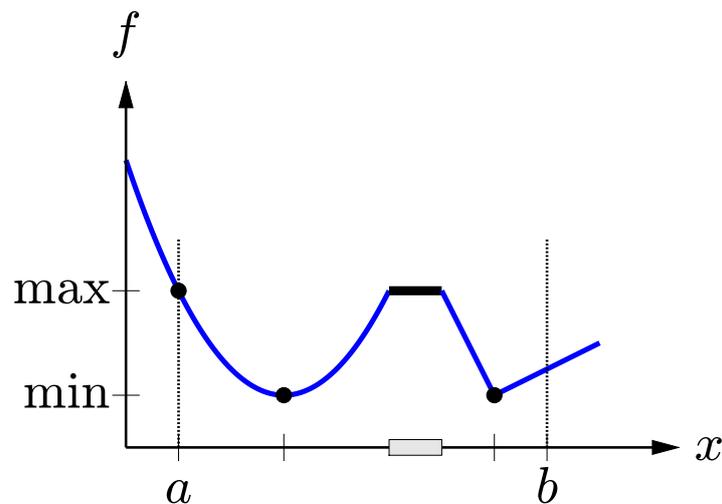
$$\begin{aligned} f(a)f(c) < 0 &\implies \exists \text{ Nullstelle in } (a, c), \\ f(a)f(c) > 0 &\implies \exists \text{ Nullstelle in } [c, b]. \end{aligned}$$

Man wählt nun das entsprechende Teilintervall und iteriert das Verfahren, bis die Länge des Intervalls die gewünschte Genauigkeit erreicht oder f zufällig an einer Intervallmitte c null ist.

238 / 367

Extrema stetiger Funktionen

Eine stetige Funktion hat auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ mindestens ein Minimum und Maximum.



Die Extrema können sowohl am Rand als auch im Innern des Intervalls $[a, b]$ auftreten und müssen, wie in der Abbildung ebenfalls veranschaulicht ist, nicht eindeutig sein.

239 / 367

Beispiel

Beweis der Abschätzung

$$(x + y)^n \leq c(n) (x^n + y^n), \quad x, y \geq 0,$$

mit einem Stetigkeitsargument.

o.B.d.A. x und y nicht beide null

Polarkoordinaten \rightsquigarrow

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad t \in D = [0, \pi/2]$$

mit $r > 0$ und nach Division der Ungleichung durch r^n ist zu zeigen

$$(\cos t + \sin t)^n \leq c (\cos^n t + \sin^n t) \iff f(t) = \frac{(\cos t + \sin t)^n}{\cos^n t + \sin^n t} \leq c$$

mit einer nur von n abhängigen Konstante $c = c(n)$

Kosinus und Sinus im Intervall D nicht beide null

$$\implies f \text{ stetig} \implies \text{Existenz eines Maximums auf } D$$

240 / 367

Gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion f ist auf einem Intervall D gleichmäßig stetig, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein δ_ε existiert mit

$$|x - a| < \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

für alle $x, a \in D$.

Im Gegensatz zur bloßen Stetigkeit von f hängt δ_ε nicht von a ab.

Lediglich für ein beschränktes abgeschlossenes Intervall sind Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit äquivalent.

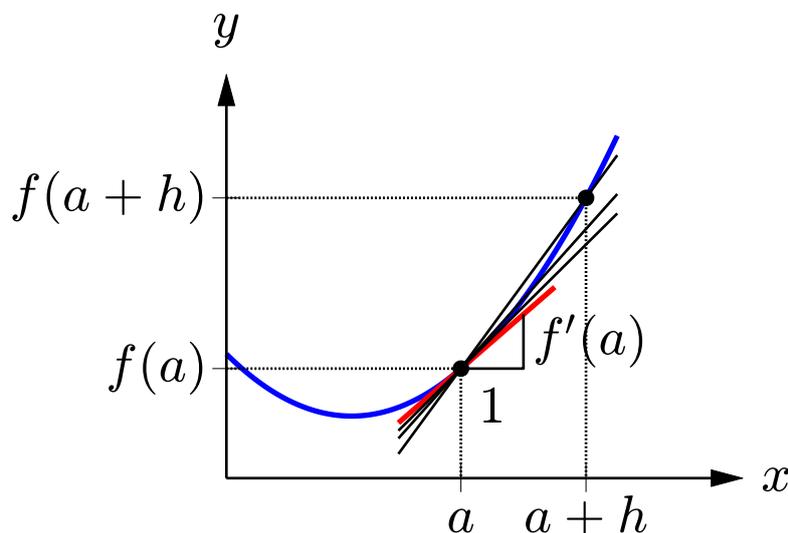
241 / 367

Ableitung

Eine Funktion f ist in einem Punkt a differenzierbar, wenn der als Ableitung bezeichnete Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert.



242 / 367

Geometrisch bedeutet Differenzierbarkeit, dass die Steigungen der Sekanten gegen die Steigung der durch

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

gegebenen Tangente konvergieren.

Man schreibt auch

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}$$

mit $y = f(x)$. Diese Schreibweise symbolisiert den Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ in dem Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}.$$

Höhere Ableitungen werden mit f'' , f''' , ... bzw. $f^{(2)}$, $f^{(3)}$, ... bezeichnet. Eine Funktion f heißt differenzierbar auf einer Menge D , wenn $f'(x)$ für alle $x \in D$ existiert.

Beispiel

Ableitung von Monomen

(i) Ableitung von $f(x) = x^2$:

Definition \rightsquigarrow

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

(ii) Beliebiges Monom $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$:

binomische Formel \rightsquigarrow

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1}$$

$O(h^2)$: Terme mit Faktoren h^2

Beispiel

Ableitung von $f(x) = \sin x$:

Additionstheorem \implies

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

$t = x + h/2 \rightsquigarrow$ Umformung des Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin((x+h/2)+h/2) - \sin((x+h/2)-h/2)}{h} \\ &= \frac{2 \cos(x+h/2) \sin(h/2)}{h} \end{aligned}$$

rechte Seite $\rightarrow \cos x$ für $h \rightarrow 0$, da

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(h/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

245 / 367

Linearität der Ableitung

Die Ableitung ist linear, d.h. für differenzierbare Funktionen f und g gilt

$$\begin{aligned} (rf)' &= rf', \quad r \in \mathbb{R}, \\ (f \pm g)' &= f' \pm g'. \end{aligned}$$

246 / 367

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$x^r, r \neq 0$	rx^{r-1}
e^x	e^x		$\ln x $	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Produktregel

Die Ableitung des Produktes zweier differenzierbarer Funktionen f und g ist

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Allgemeiner gilt für ein Produkt $f = f_1 \cdots f_n$

$$f' = \sum_{k=1}^n f_1 \cdots f_{k-1} f'_k f_{k+1} \cdots f_n = \sum_{k=1}^n f'_k \frac{f}{f_k}$$

und für die n -te Ableitung

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}.$$

Beweis

Definition der Ableitung

$$(fg)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Umformung \rightsquigarrow

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Linearität des Grenzwertes \implies

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

wiederholte Anwendung der Produktregel \rightsquigarrow Formeln für $(\prod_{k=1}^n f_k)'$ und $(fg)^{(n)}$

249 / 367

Beispiel

Ableitung des Polynoms $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$:

Produktregel \rightsquigarrow

$$p'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2)$$

An den Nullstellen $x = 1, 2, 3$ ist jeweils nur ein Faktor relevant:

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2$$

$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1$$

$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2$$

analog: Ableitung von $p(x) = (x-1) \cdots (x-n)$ an den Nullstellen $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}p'(k) &= (k-1) \cdots (k-(k-1)) \cdot (k-(k+1)) \cdots (k-n) \\ &= (k-1)! (-1)^{n-k} (n-k)!\end{aligned}$$

250 / 367

Beispiel

Ableitungen von $e^x \cos x$

(i) Erste Ableitung:

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \implies$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (e^x \cos x) &= \left(\frac{d}{dx} e^x \right) \cos x + e^x \left(\frac{d}{dx} \cos \right) \\ &= e^x \cos x + e^x (-\sin x) = e^x (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

(ii) Zweite Ableitung:

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f'' + 2f'g' + fg'' \quad \implies$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (e^x \cos x) &= e^x \cos x + 2e^x (-\sin x) + e^x (-\cos x) \\ &= -2e^x \sin x \end{aligned}$$

251 / 367

Quotientenregel

Die Ableitung des Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen f und g ist

$$\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

an allen Punkten x mit $g(x) \neq 0$. Insbesondere gilt

$$\left(\frac{1}{g} \right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Höhere Ableitungen eines Quotienten $r = f/g$ kann man alternativ zur direkten Berechnung ebenfalls rekursiv, ausgehend von der Identität

$$f^{(n)} = (rg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r^{(n-k)} g^{(k)},$$

bestimmen. Sind $r', r'', \dots, r^{(n-1)}$ bereits berechnet, so kann diese Gleichung nach $r^{(n)}$ aufgelöst werden.

252 / 367

Ableitungen der rationalen Funktion

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - 2x}{4 + 3x^2}$$

(i) Erste Ableitung:

Quotientenregel $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} r'(x) &= \frac{(d/dx)(1 - 2x)(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(d/dx)(4 + 3x^2)}{(4 + 3x^2)^2} \\ &= \frac{-2(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(6x)}{(4 + 3x^2)^2} = \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2} \end{aligned}$$

alternativ: Produktregel und die Formel $(1/g)' = -g'/g^2 \implies$

$$r'(x) = \frac{d}{dx} \left((1 - 2x) \frac{1}{4 + 3x^2} \right) = (-2) \frac{1}{4 + 3x^2} + (1 - 2x) \frac{-6x}{(4 + 3x^2)^2}$$

253 / 367

(ii) Zweite Ableitung (rekursive Methode):

Produktregel, angewandt auf $f = rg \rightsquigarrow$

$$f'' = r''g + 2r'g' + rg'' \iff r'' = (f'' - 2r'g' - rg'') / g$$

Einsetzen von f , g , r und der bereits berechneten ersten Ableitung $r' \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} r''(x) &= \left(0 - 2 \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2} (6x) - \frac{1 - 2x}{4 + 3x^2} (6) \right) / (4 + 3x^2) \\ &= \frac{-36x^3 + 56x^2 + 144x - 24}{(4 + 3x^2)^3} \end{aligned}$$

Für die Verkettung von Funktionen,

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

ist die Ableitung

$$h'(x) = f'(g(x)) g'(x).$$

Mit $f(y) = z$, $g(x) = y$, $h(x) = z$ schreibt man auch

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Beweis

Definition der Ableitung \implies

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(g(x))) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

$\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ und $\lim_{h \rightarrow 0} g(x+h) = g(x) \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(g(x))) &= \lim_{\tilde{h} \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + \tilde{h}) - f(g(x))}{\tilde{h}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(g(x)) g'(x) \end{aligned}$$

Beispiel

Ableitung von

$$h(x) = \sin(\ln(1 + x^2))$$

Kettenregel mit

$$w = \sin z, \quad z = \ln y, \quad y = 1 + x^2$$

unter Verwendung der Verwendung der differentiellen Schreibweise \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} \\ &= \cos(z) \cdot \frac{1}{y} \cdot 2x \\ &= \cos(\ln(1 + x^2)) \cdot \frac{1}{1 + x^2} \cdot (2x) \end{aligned}$$

257 / 367

Beispiel

Bestimmung der Ableitung einer implizit durch eine Gleichung $\varphi(x, y) = 0$ definierten Funktion $y(x)$ mit der Kettenregel

Illustration der Methode für die Gleichung einer Ellipse

$$E : x^2 + 3y^2 = 7$$

Ableitung nach x \rightsquigarrow

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3y^2) = 2x + 6y \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 7 = 0$$

bzw.

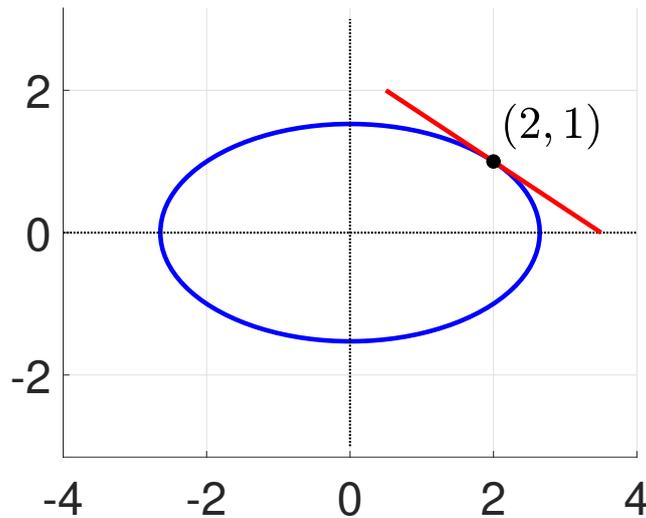
$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{1}{3} \frac{x}{y}$$

258 / 367

Steigung der Tangente in einem Punkt auf E mit $y \neq 0$, z.B.

$(x, y) = (2, 1)$

$$y'(1) = -\frac{1}{3} \frac{x}{y} \Big|_{(x,y)=(2,1)} = -\frac{1}{3} \frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$



Tangentengleichung

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2)$$

259 / 367

höhere Ableitungen:

$$(2x + 6yy')' = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0$$

\implies

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

Einsetzen der Koordinaten eines Punktes auf E (y, y' bekannt) \rightsquigarrow

konkrete Werte

z.B. $(x, y) = (2, 1)$ \rightsquigarrow

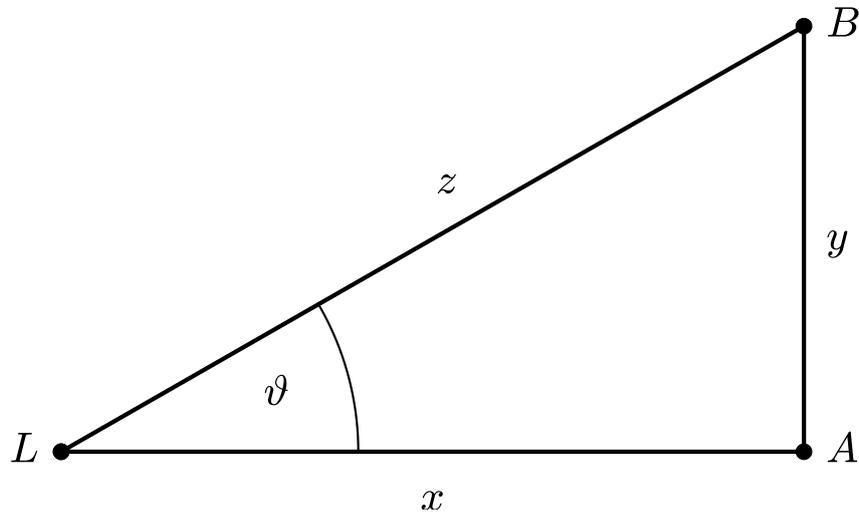
$$y''(2) = -\frac{1 + 3(-2/3)^2}{3(1)} = -\frac{7}{9}$$

260 / 367

Beispiel

Leuchtturm-Paradox:

Geschwindigkeit des Lichtsignals/Schattens eines rotierenden Scheinwerfers bei L ($1/2$ Umdrehung pro Sekunde) entlang einer geradlinig verlaufenden 1 km entfernten Küste



261 / 367

(i) Geschwindigkeit des Schattens:

Winkelgeschwindigkeit des Scheinwerfers

$$\vartheta = 2\pi \frac{t}{2}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \pi$$

Position des Lichtstrahls an der Küste

$$y(t) = \tan \vartheta(t)$$

Geschwindigkeit

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d \tan \vartheta}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\pi}{\cos^2(\vartheta)} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

schnellerer Schatten als das Licht

262 / 367

(ii) Berücksichtigung der Geschwindigkeit des Lichtstrahls:
Zeit des Erreichens von Punkt B

$$t = \frac{\vartheta}{\pi} + \frac{z}{c}$$

mit c der Lichtgeschwindigkeit

Differenzieren \rightsquigarrow

$$\frac{\vartheta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}$$

Ableiten von $z^2 = y^2 + 1$ nach t \rightsquigarrow

$$zz' = yy', \quad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin \vartheta$$

Einsetzen von ϑ' und z' in Ausdruck für $y' = dy/dt$ \rightsquigarrow

$$y' = \frac{\vartheta'}{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \left(\pi - \frac{\pi}{c} y' \sin \vartheta \right)$$

263 / 367

Auflösen nach y' \rightsquigarrow

$$y' = \frac{c\pi}{c \cos^2 \vartheta + \pi \sin \vartheta}$$

$\vartheta \rightarrow \frac{\pi}{2} \implies y' \rightarrow c$ (konsistent mit Einsteins Theorie)

(iii) Schnellerer Schatten als das Licht:

$$y' \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta} \rightarrow -\frac{c}{\pi},$$

d.h. für $\vartheta \approx 4.781 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

kein Widerspruch zu Einsteins Theorie:

beobachtet wird nur ein Phänomen nicht tatsächlich bewegende Materie

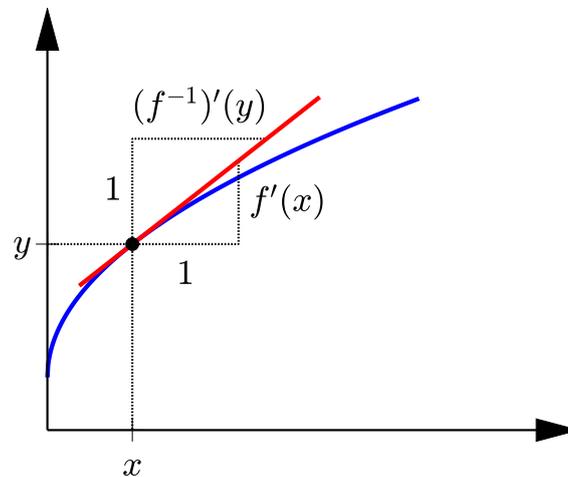
264 / 367

Ableitung der Umkehrfunktion

Eine stetig differenzierbare Funktion f mit $f'(x) \neq 0$ ist in einer Umgebung von x invertierbar, und für die Umkehrfunktion f^{-1} gilt

$$(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$$

bzw. $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$; die Steigungen von f und f^{-1} sind reziprok.



265 / 367

Beweis

$f'(x) \neq 0 \implies$ strikte Monotonie von f in einer Umgebung von x und damit lokale Invertierbarkeit

setze $g = f^{-1}$

Definition der Umkehrfunktion \implies

$$x = g(f(x))$$

Differentiation mit der Kettenregel \rightsquigarrow

$$1 = g'(f(x))f'(x)$$

\rightsquigarrow Formel für g' mit $y = f(x)$

266 / 367

Ableitung der Umkehrfunktionen von Tangens und Kotangens

(i) Tangens:

Quotientenregel \rightsquigarrow

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d \sin x}{dx \cos x} = \frac{\left(\frac{d}{dx} \sin x\right) \cos x - \sin x \left(\frac{d}{dx} \cos x\right)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion, $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1} \implies$

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x$$

Darstellung als Funktion von y

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

267 / 367

\implies

$$\frac{d}{dy} \arctan y = \frac{1}{1 + y^2}$$

(ii) Kotangens:

$y \rightarrow x = g(y) = \operatorname{arccot} y$: Umkehrfunktion von $x \rightarrow y = \cot x$

$f(x) = \tan x$, $\cot x = 1/f(x)$

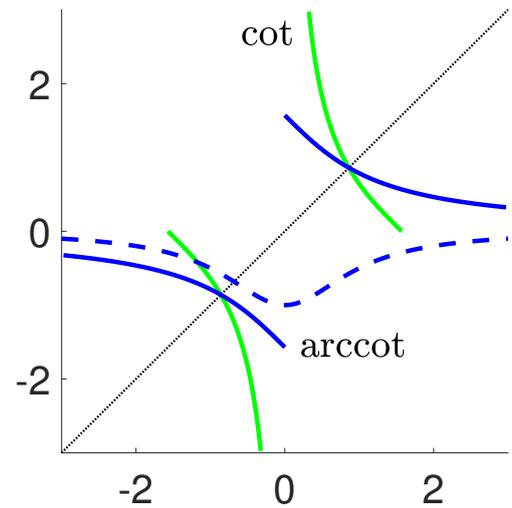
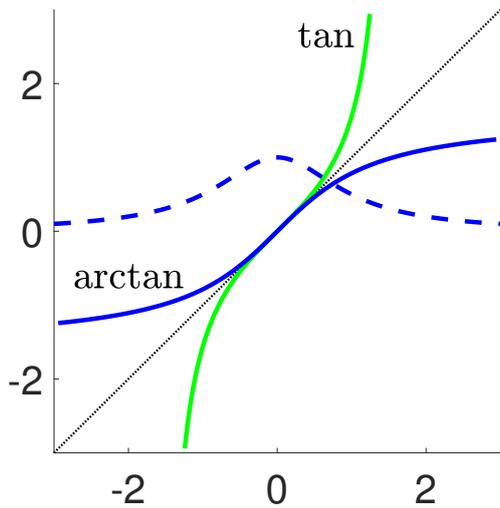
Kettenregel, angewandt auf $x = g(1/f(x)) \implies$

$$\begin{aligned}1 &= g'(y) \frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = g'(y) \left(-\frac{1}{f(x)^2}\right) f'(x) \\ &= g'(y) \left(-\frac{1}{\sin^2 x / \cos^2 x}\right) \frac{1}{\cos^2 x} = g'(y) \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)\end{aligned}$$

$\sin^2 x = 1/(1 + \cos^2 x / \sin^2 x) = 1/(1 + \cot^2 x) = 1/(1 + y^2) \implies$

$$\frac{d}{dy} \operatorname{arccot} y = g'(y) = -\sin^2 x = -\frac{1}{1 + y^2}$$

268 / 367

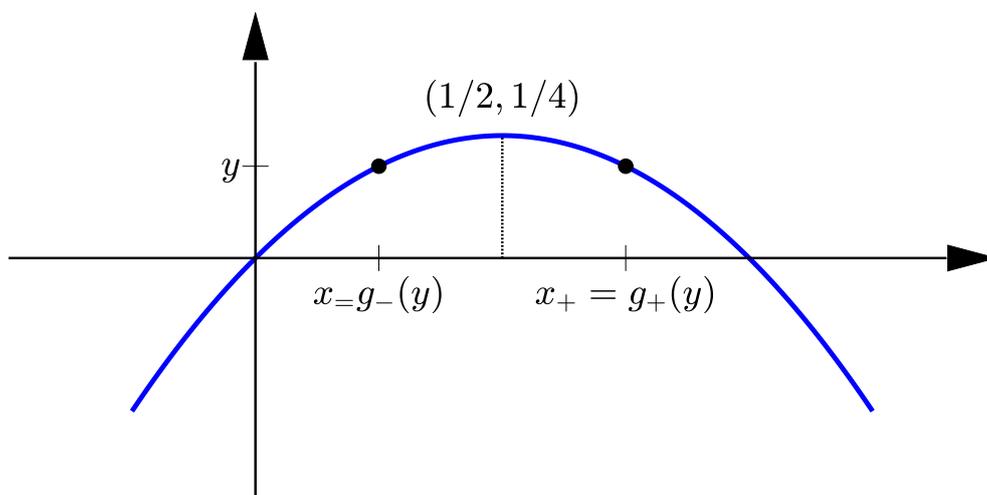


Tangens und Kotangens, die Umkehrfunktionen und deren Ableitungen (gestrichelt)

Beispiel

Umkehrfunktionen g von $y = f(x) = x(1 - x)$

verschiedene Zweige g_{\pm} auf den Monotonieintervallen $(-\infty, 1/2]$ und $[1/2, \infty)$



Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion \implies

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}$$

nochmaliges Differenzieren mit Hilfe der Kettenregel \rightsquigarrow

$$g''(y) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-2x} \right) \frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2} \frac{1}{1-2x}$$

z.B. $x = 1, y = 0$ (rechter Zweig: $1 = g_+(0)$) \rightsquigarrow

$$g'_+(0) = \frac{1}{1-2} = -1, \quad g''_+(0) = \frac{2}{(1-2)^2} \frac{1}{1-2} = -2$$

Überprüfung durch explizite Berechnung der Umkehrfunktionen:

$$x^2 - x + y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}$$

Auswertung der Ableitungen:

$$g'_+(0) = -\frac{1}{2} (1/4 - y)^{-1/2} \Big|_{y=0} = -\frac{1}{2} \cdot 2$$

$$g''_+(0) = -\frac{1}{4} (1/4 - y)^{-3/2} \Big|_{y=0} = -\frac{1}{4} \cdot 8$$

Logarithmische Ableitung

Für eine positive Funktion $y = f(x)$ folgt aus der Kettenregel

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{d \ln y}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} f'(x)$$

bzw. nach Umformung

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln f(x).$$

Diese Identität kann zur Differentiation von Funktionen der Form $f(x) = g(x)^{h(x)}$ mit $g(x) > 0$ benutzt werden. Man erhält

$$f'(x) = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} (h(x) \ln g(x)).$$

Beispiel

Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$, $x > 0$

logarithmisches Ableiten, $f' = f (\ln f)'$ \rightsquigarrow

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1)$$

$x \rightarrow 0$:

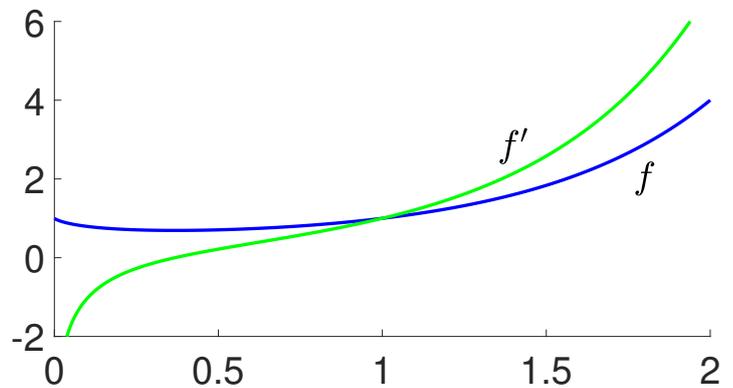
$$\ln x^x = x \ln x \rightarrow 0$$

$$\implies f(x) = x^x \rightarrow e^0 = 1$$

f rechtsseitig stetig bei 0

Ableitung bei 0 singulär, da

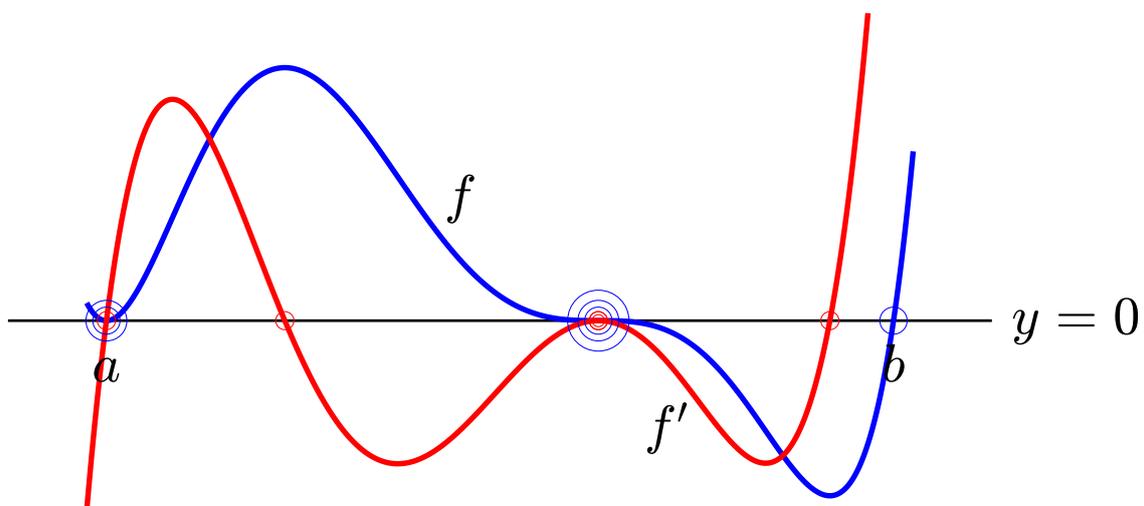
$$x^x \rightarrow 1, \quad \ln x + 1 \rightarrow -\infty$$



273 / 367

Satz von Rolle

Die Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion f mit $f(a) = f(b) = 0$ hat mindestens eine Nullstelle $c \in (a, b)$.



Allgemeiner gilt: Hat eine glatte Funktion n Nullstellen in einem Intervall $[a, b]$ einschließlich Vielfachheiten ($n = 2 + 3 + 1 = 6$ in der Abbildung), so besitzt die k -te Ableitung dort mindestens $n - k$ Nullstellen.

274 / 367

Beweis

Existenz von Extrema für die stetige Funktion $f \implies$

$$\exists c, d \in [a, b] : f(c) = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(d) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$$

$f(c) < f(d)$, falls f nicht konstant (trivialer Fall)

$\implies c$ oder d in (a, b) (andernfalls $f(c) = 0 = f(d)$)

\implies Ableitung null an mindestens einem inneren Punkt

Iteration des Argumentes für höhere Ableitungen

275 / 367

Mittelwertsatz

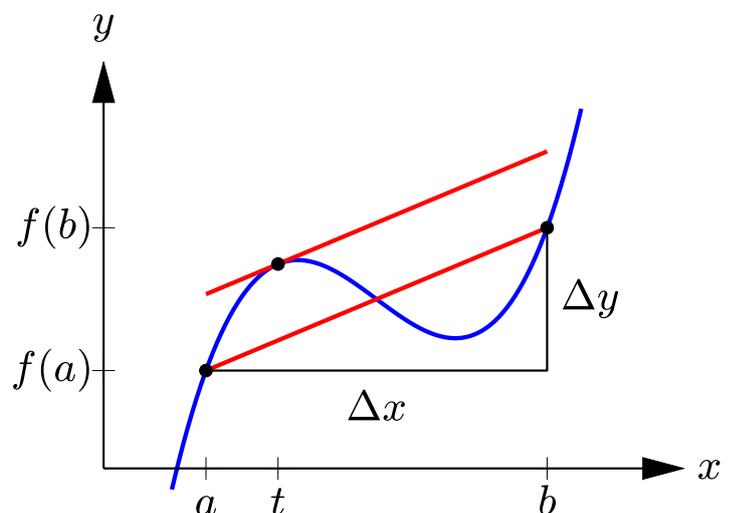
Für eine stetig differenzierbare Funktion f gilt

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a)$$

für ein $t \in (a, b)$.

Geometrisch bedeutet die Identität, dass die Tangente in einem Punkt t parallel zu der durch die Endpunkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verlaufende Sekante ist. Man schreibt auch

$$\Delta y = f'(t)\Delta x.$$



276 / 367

Beweis

definiere

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$g(a) = g(b) = 0$, Satz von Rolle \implies

$$\exists t \in (a, b) : 0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

\iff

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a)$$

Fehlerfortpflanzung

Bezeichnet $\Delta x = \tilde{x} - x$ den absoluten Fehler eines Messwerts oder einer Näherung $\tilde{x} \approx x$, so gilt für eine stetig differenzierbare Funktion f

$$|\Delta y| = |f'(t)| |\Delta x| = |f'(x)| |\Delta x| + o(\Delta x)$$

mit $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ und t zwischen x und \tilde{x} .

Entsprechend gilt für den relativen Fehler

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)| \frac{|x|}{|y|} \right) \frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

falls $x, y \neq 0$. Der Ausdruck in Klammern wird als Konditionszahl c_r von f an der Stelle x bezeichnet.

Durch Vernachlässigung des Terms $o(\Delta x)$ lässt sich die Verstärkung des Fehlers näherungsweise abschätzen:

$$|\Delta y| \approx |f'(x)| |\Delta x|, \quad \frac{|\Delta y|}{|y|} \approx c_r \frac{|\Delta x|}{|x|}.$$

Statt exakter Ableitungswerte können auch geeignete Schranken verwendet werden:

$$|\Delta y| \leq c_a |\Delta x|, \quad c_a \geq \max_{|t-x| \leq |\Delta x|} |f'(t)|.$$

Entsprechend ist $c_r = c_a \frac{|x|}{|y|}$ eine Schranke für die Verstärkung des relativen Fehlers.

279 / 367

Beispiel

Fehleranalyse für die Messung eines Winkels $\vartheta \in (0, \pi/2)$ aus dem Verhältnis der Katheten des Steigungsdreiecks:

$$\vartheta = \arctan(y/x)$$

Schätzung von $\Delta\vartheta$ in Abhängigkeit von Δy bei fest gewähltem x

(i) Absoluter Fehler:

Verstärkungsfaktor $c_a \geq$ Maximum von

$$\left| \frac{d\vartheta}{dy} \right| = \left| \frac{1/x}{1 + y^2/x^2} \right| = \left| \frac{x}{x^2 + y^2} \right|$$

maximal für $y = 0 \rightsquigarrow c_a = 1/|x|$ und

$$|\Delta\vartheta| \leq |1/x| |\Delta y|$$

größere Ungenauigkeiten für kleines x

280 / 367

(ii) Relativer Fehler:

Verstärkungsfaktor (Konditionszahl)

$$c_r = \max_y \left| \frac{d\vartheta}{dy} \frac{y}{\vartheta} \right| = \max_y \left| \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{y}{\vartheta} \right|$$

$$|\vartheta| \geq |\sin \vartheta|, \sin \vartheta = y / \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightsquigarrow$$

$$c_r = \max_y \left| \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{y}{y / \sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1$$

keine Verstärkung des relativen Fehlers:

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \leq \frac{|\Delta y|}{|y|}$$

Landau-Symbole

Man schreibt

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a),$$

wenn es eine Konstante c gibt, so dass $|f(x)| \leq c|g(x)|$ für x in einer Umgebung von a .

Strebt $|f(x)|/|g(x)|$ gegen 0 für $x \rightarrow a$, so schreibt man entsprechend

$$f(x) = o(g(x)).$$

In beiden Fällen ist $a = \pm\infty$ zulässig, um das asymptotische Verhalten von $f(x)$ für große x zu beschreiben.

Beispiel

Abschätzungen für $(1+x)^r$

(i) $r = n \in \mathbb{N}$:

binomische Formel, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \implies$

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \rightarrow 0)$$

(ii) $-r = n \in \mathbb{N}$:

Erweiterung mit $1 - nx \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1 + nx + O(x^2)} = \frac{1 - nx}{1 - (nx)^2 + (1 - nx)O(x^2)} \\ &= \frac{1 - nx}{1 + O(x^2)} = 1 - nx + O(x^2), \end{aligned}$$

denn $1/(1 + O(x^2)) = 1 + O(x^2)$

(iii) $r \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^s = O(x^s) \quad (x \rightarrow \infty),$$

denn $x \leq 1+x \leq 2x$ für $x \geq 1$

283 / 367

Beispiel

Beschreibung von Grenzwerten mit Hilfe von Landau-Symbolen

(i) Grenzwert einer Folge:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \iff a_n = a + o(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

(ii) Stetigkeit bei $x = a$:

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \rightarrow a)$$

(iii) Differenzierbarkeit bei $x = a$:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

mit

$$r = o(h) \quad (|h| \rightarrow 0)$$

$r = O(h^2)$ bei glatten Funktionen f

284 / 367

Regel von l'Hospital

Haben zwei stetig differenzierbare Funktionen f und g eine gemeinsame Nullstelle oder Polstelle bei a , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert (gegebenenfalls im uneigentlichen Sinn).

Eine wiederholte Anwendung der Regel ist möglich, falls der Quotient $f'(a)/g'(a)$ ebenfalls ein unbestimmter Ausdruck der Form $0/0$ oder ∞/∞ ist.

Beispiel

Illustration der verschiedenen Fälle der Regel von l'Hospital

(i) Fall $0/0$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^2 - 7x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{6x - 7} = -1$$

(ii) Fall $-\infty/\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

(iii) Fall $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi/2 - \arctan x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

(iv) Mehrfache Anwendung:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x) + x \cos(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2 \cos(x) - x \sin(x)} = 0\end{aligned}$$

Beachte: Die Existenz der zu berechnenden Grenzwerte ist erst durch die Existenz der nach Anwendung der Regel von l'Hospital entstehenden Grenzwerte gesichert.

Taylor-Polynom

Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

interpoliert die Ableitungen einer Funktion f im Punkt a bis zur Ordnung n , d.h. $p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, \dots, n$.

Ist f $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar, so gilt

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

für ein t zwischen a und x , d.h. der Fehler ist von der Ordnung $n + 1$:

$$R = O((x - a)^{n+1}).$$

Beweis

(i) Übereinstimmung der Ableitungen:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^j \Big|_{x=a} = 0, \quad j \neq k$$

\implies

$$p_n^{(k)}(a) = \left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \Big|_{x=a} = f^{(k)}(a), \quad k \leq n$$

(k -te Ableitung von $(x-a)^k = k!$)

289 / 367

(ii) Restglied:

ergänze das Taylor-Polynom um einen weiteren Term:

$$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}$$

mit c so gewählt, dass $q(x) = f(x)$

$(q-f)(y)$: Nullstelle bei $y=x$ und $(n+1)$ -fache Nullstelle bei $y=a$,
denn

$$q^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) + 0 = f^{(k)}(a), \quad k \leq n$$

Satz von Rolle \implies Existenz einer Nullstelle t der $(n+1)$ -ten
Ableitung:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)$$

$$\rightsquigarrow c = f^{(n+1)}(t)/(n+1)! \text{ und}$$

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

\rightsquigarrow Form des Restglieds

290 / 367

Taylor-Polynome von Sinus und Kosinus

(i) Taylor-Polynome von $f(x) = \sin x$:
Ableitungen

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = f = \sin x, \dots$$

$$f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0, \dots \rightsquigarrow$$

$$p_1(x) = p_2(x) = x$$

$$p_3(x) = p_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = p_6(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

sehr genaue Approximation für kleine x , z.B.

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\dots$$

Restglied

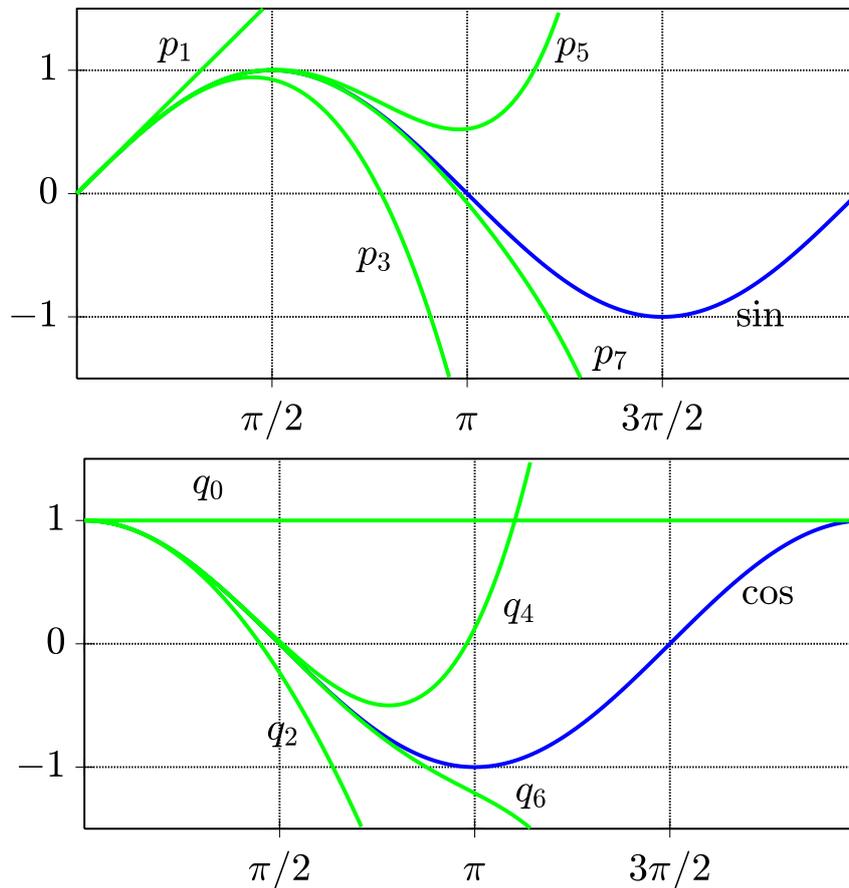
$$|R| = \frac{|f^{(5)}(t)|}{5!} (0.1 - 0)^5 =, \frac{|\cos t|}{5!} 0.1^5 \leq \frac{1}{12000000} \leq 10^{-7}$$

(ii) Taylor-Polynome von $g(x) = \cos(x)$:

$$q_0(x) = q_1(x) = 1$$

$$q_2(x) = q_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$q_4(x) = q_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$



Beispiel

quadratisches Taylor-Polynom der Logarithmus-Funktion $f(x) = \ln x$ im Punkt $a = 1$

Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Auswertung bei $x = 1 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} p(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \end{aligned}$$

Restglied

$$r(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{3!} f'''(t)(x-1)^3 = \frac{2}{6t^3}(x-1)^3$$

mit t zwischen x und 1

Abschätzung

$$|r(x)| \leq \frac{1}{3} \left| \frac{x-1}{\min(1,x)} \right|^3$$

↪ Fehlerschranke für $x \in [3/4, 5/4]$:

$$|r(x)| \leq \frac{1}{3} \left| \frac{5/4 - 1}{3/4} \right|^3 = \frac{1}{81}$$

Newton-Verfahren

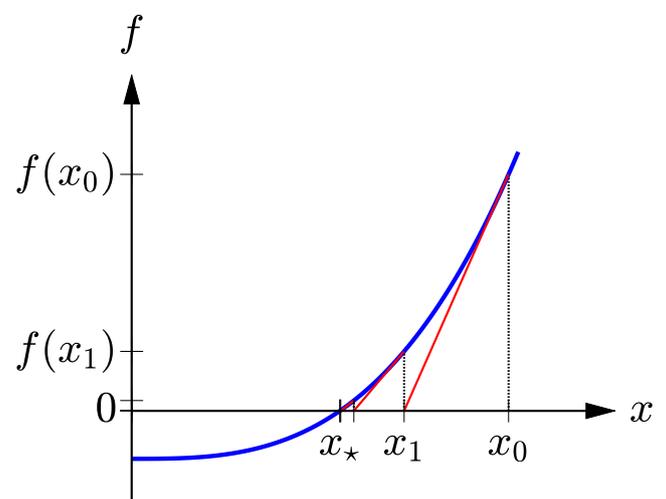
Mit dem Newton-Verfahren kann eine Nullstelle x_* einer Funktion f numerisch bestimmt werden. Dabei wird durch Linearisierung eine Folge $x_0, x_1 \dots$ von Approximationen für x_* generiert. Die Näherung x_{l+1} ist der Schnittpunkt der Tangente im Punkt $(x_l, f(x_l))$ mit der x -Achse:

$$x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$$

Für eine einfache Nullstelle x_* , d.h. falls $f'(x_*) \neq 0$, konvergiert die Newton-Iteration lokal quadratisch:

$$|x_{l+1} - x_*| \leq c |x_l - x_*|^2$$

für Startpunkte x_0 in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_* .

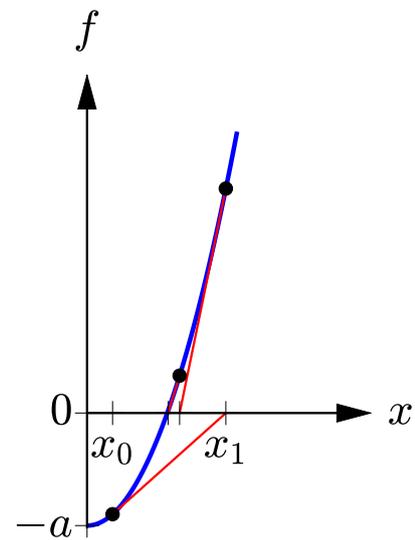


quadratische Konvergenz

$$\begin{aligned}x_{\ell+1} - \sqrt{a} &= (x_{\ell} + a/x_{\ell})/2 - \sqrt{a} \\ &= \frac{1}{2x_{\ell}} (x_{\ell} - \sqrt{a})^2\end{aligned}$$

geometrische Interpretation des
Newton-Verfahrens

\implies Konvergenz für alle $x_0 \neq 0$



299 / 367

Beispiel

Visualisierung der Konvergenz der komplexen Newton-Iteration für die
Gleichung

$$z^3 - 1 = 0$$

mit den Lösungen $z = \exp(2\pi i k/3)$, $k = 0, 1, 2$

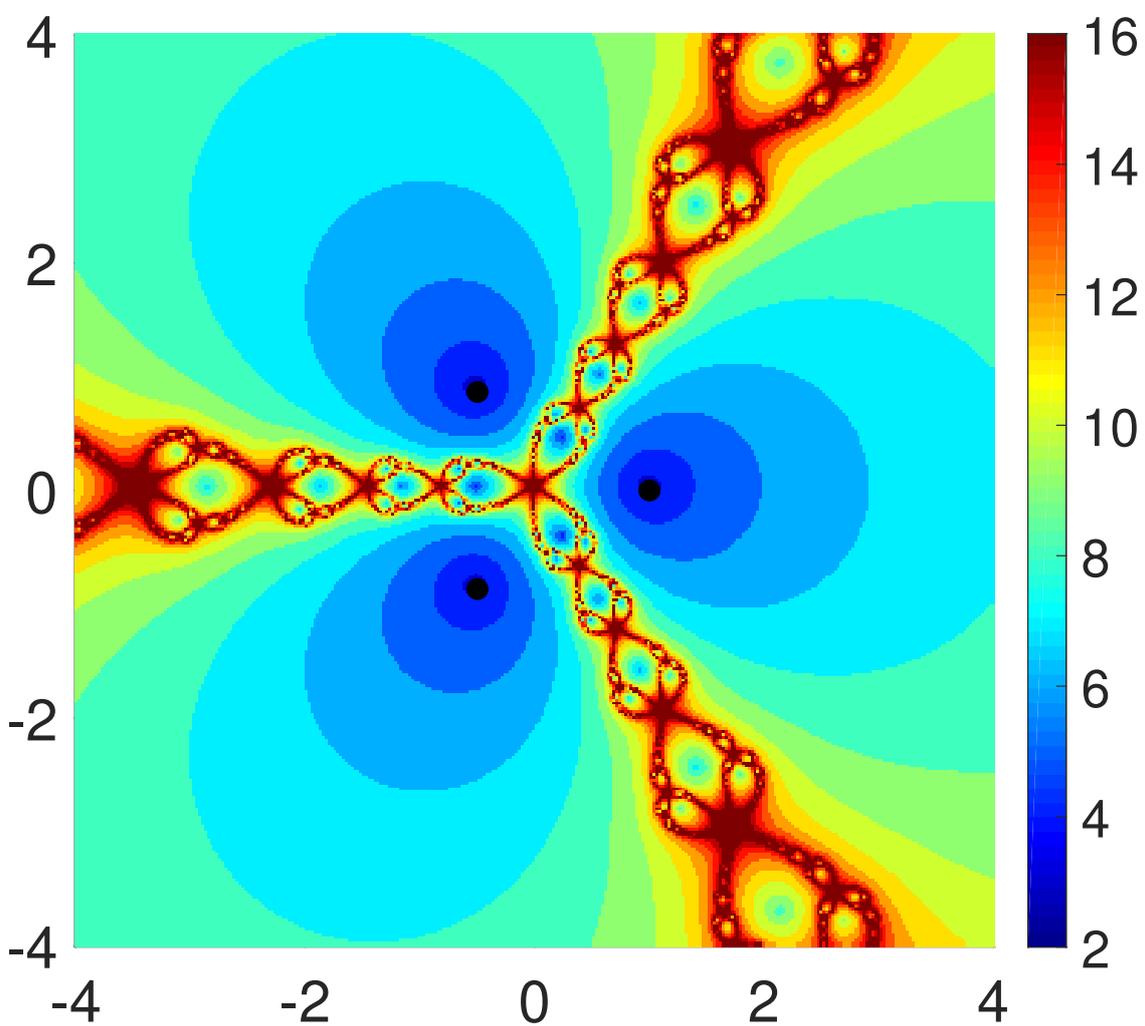
$f'(z) = 3z^2 \rightsquigarrow$ Iteration

$$z_{\ell+1} = z_{\ell} - \frac{z_{\ell}^3 - 1}{3z_{\ell}^2} = \frac{2}{3}z_{\ell} + \frac{1}{3} \frac{1}{z_{\ell}^2}$$

blaue Farbtöne \iff schnellere Konvergenz

fraktaler Charakter der Ränder der Konvergenzgebiete

300 / 367



301 / 367

MATLAB-Skript zur Generierung der Grafik

```
>> N = 16; % maximale Iterationszahl (=N: Divergenz)
>> tol = 1.0e-8; % Toleranz (|z-z_alt|<tol: Konvergenz)
>> % Startwerte im Abstand 0.01 in [-4,4]^2
>> [x,y] = meshgrid([-4:0.01:4]); z = x+i*y;
>> c = 0*z; % Farbindex
>> for n=1:N
>> % simultaner Newton-Schritt
>> z_alt = z; z = 2*z_alt/3+1./(z_alt.^2*3);
>> % Erhoehung des Farbindex fuer nicht konvergente Punkte
>> c = c+(abs(z-z_alt)>tol);
>> end
>> % Konvertierung in ein Pixel-Bild
>> imagesc([-b b],[-b b],c)
>> colormap(jet), colorbar % Farbskala
```

302 / 367

Die Taylor-Reihe einer unendlich oft differenzierbaren Funktion f im Punkt a ist eine Entwicklung in eine Potenz-Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n, \quad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Die ersten Terme der Reihe sind

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x - a)^3 + \dots$$

Für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe sowie alle ihre Ableitungen absolut in einem Intervall $(a - r, a + r)$ und divergiert für $|x - a| > r$. Für $|x - a| = r$ sind ohne weitere Untersuchungen keine Aussagen über die Konvergenz der Reihe möglich.

Die Schranke r für den Abstand vom Entwicklungspunkt wird als Konvergenzradius bezeichnet und lässt sich mit der Formel

$$r = \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

berechnen. Dabei sind die Werte $r = 0$ und $r = \infty$ möglich. Das Konvergenz-Intervall ist in diesen Fällen leer (Konvergenz nur für $x = a$) bzw. ganz \mathbb{R} .

Alternativ kann der Konvergenzradius auch durch

$$r = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \right)^{-1}$$

bestimmt werden, falls der Grenzwert der Quotienten existiert.

Beweis

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \right|} = |x-a| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x-a|/r$$

Wurzelkriterium \implies

- Konvergenz für $|x-a| < r$
- Divergenz für $|x-a| > r$
- keine Konvergenzaussage für $|x-a| = r$

analoge Betrachtung mit dem Quotientenkriterium

\rightsquigarrow alternative Formel für r

305 / 367

Beispiel

Divergenz der Taylor-Reihe für die unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Ableitungen:

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

mit Polynomen p_n

$\rightsquigarrow f^{(n)}(x) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$

Taylor-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0 \quad \forall x$$

Konvergenzradius 0, keine Übereinstimmung mit der Funktion

306 / 367

Beispiel

Taylor-Reihe der Exponentialfunktion

$$f(x) = \exp(x)$$

Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = \exp(x), \quad f^{(n)}(0) = 1$$

↪ Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Konvergenzradius

$$1/r = \limsup_{n \rightarrow \infty} 1/\sqrt[n]{n!} = 0$$

⇒ $r = \infty$, d.h. Konvergenz auf ganz \mathbb{R}

307 / 367

Beispiel

Taylor-Reihe im Punkt $a = 4$ der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(i) Ableitungen:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} x^{-3/2}$$

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2}$$

...

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n 2^{-n} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot x^{-(2n+1)/2}$$

308 / 367

(ii) Koeffizienten:

Auswerten der Ableitungen am Entwicklungspunkt \rightsquigarrow

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} 2^{-2n-1} \\&= (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot 2n}{(2 \cdot 4 \cdots (2n))^2} 4^{-n} \cdot 2^{-1} \\&= \frac{(-1)^n}{2} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot 2n}{(2^n(1 \cdots n))^2 4^n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{4n+1} (n!)^2}\end{aligned}$$

(iii) Taylor-Reihe:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-4)^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{4n} (n!)^2} (x-4)^n$$

erste Terme

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16} (x-4) + \frac{3}{256} (x-4)^2 + \dots$$

309 / 367

(iv) Konvergenzradius:

$$1/r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad |c_n| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \left(\frac{1}{2} 4^{-n}\right)$$

$3/2, 5/4, \dots \geq 1$ und $1/2, 3/4, \dots \leq 1 \implies$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2n} 4^{-n} \leq |c_n| \leq \frac{1}{2} 4^{-n}$$

Vergleichskriterium \rightsquigarrow

$$\frac{1}{4} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/(4n)} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{1}{4} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/2}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\text{const}} = 1 \implies$

$$r = \frac{1}{1/4} = 4$$

310 / 367

Beispiel

Beweis der Eulerschen Formel, $\exp(it) = \cos t + i \sin t$, durch Taylor-Entwicklung

Taylor-Entwicklungen von Sinus und Kosinus:

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots, \quad \sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(it)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{i^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(it)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{i^4 t^5}{5!}$$

\Rightarrow

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!}, \quad i \sin t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Addition \rightsquigarrow Taylor-Entwicklung der Eulerschen Formel:

$$\begin{aligned} \exp(it) &= 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} \dots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} \pm \dots\right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} \pm \dots\right) = \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

311 / 367

Binomialreihe

Die Funktion

$$f(x) = (1+x)^s$$

mit $s \in \mathbb{R}$ besitzt die Taylor-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!} x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Dabei bezeichnet

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-k+1)}{k!}$$

den verallgemeinerten Binomialkoeffizient.

Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$.

312 / 367

Beweis

$s = 0$: triviale Reihe

$s \in \mathbb{N}$: binomische Formel, $\binom{s}{k} = 0$ für $k > s$

Ableitungen für $s \notin \mathbb{N}_0$

$$f^{(k)}(x) = s(s-1) \cdot (s-k+1)(1+x)^{s-k}$$

\rightsquigarrow Taylor-Koeffizienten

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{s}{k}$$

Quotientenkriterium (Konvergenz von $\sum_k a_k$, falls $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k < 1$, $q_k = |a_{k+1}/a_k|$) mit

$$q_k = \frac{|c_{k+1}x^{k+1}|}{|c_kx^k|} = |x| \left| \frac{\binom{s}{k+1}}{\binom{s}{k}} \right| = |x| \frac{|s-k|}{k+1}$$

\rightsquigarrow Konvergenz für $|x| < 1$, denn $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = |x|$

313 / 367

Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

Eine Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},$$

kann gliedweise differenziert und integriert werden:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$
$$\int f(x) dx = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k.$$

Der Konvergenzradius bleibt bei beiden Operationen unverändert.

314 / 367

Taylor-Reihe des Arkussinus

Binomial-Reihe

$$(1+t)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} t^k = 1 + st + \frac{s(s-1)}{2!} t^2 + \dots$$

$$t = -x^2, s = -1/2 \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} x^{2k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + \dots \end{aligned}$$

wegen

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2) \cdot (-3/2) \cdots (-(2k-1)/2)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

315 / 367

gliedweise Integration unter Berücksichtigung von

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

\implies

$$\arcsin x = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

explizite Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \dots$$

316 / 367

Beispiel

näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_0^x \exp(-t^2) dt$$

gliedweise Integration der Taylor-Reihe

$$\exp(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}$$

~>

$$\begin{aligned} \int_0^x \exp(-t^2) dt &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{k! (2k+1)} \right]_0^x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k! (2k+1)} \end{aligned}$$

(Werte an unterer Grenze null)

317 / 367

numerische Näherungen für $x = 1$

k=0: 1

k=1: 0.666666666666667

k=2: 0.766666666666667

k=3: 0.74285714285714

k=4: 0.74748677248677

k=5: 0.74672919672920

k=6: 0.74683603433603

k=7: 0.74682280682281

k=8: 0.74682426573971

k=9: 0.74682412070118

318 / 367

Multiplikation von Taylor-Reihen

Taylor-Reihen können gliedweise multipliziert werden:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

mit

$$c_k = \sum_{j=0}^k f_{k-j} g_j.$$

Die ersten Terme der Taylor-Reihe des Produktes sind

$$f_0 g_0 + (f_1 g_0 + f_0 g_1)(x-a) + (f_2 g_1 + f_1 g_1 + f_0 g_2)(x-a)^2 + \dots$$

Der Konvergenzradius ist gleich dem Minimum der Konvergenzradien der beiden Faktoren.

319 / 367

Beispiel

Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t} \cos(\omega t)$$

(i) Multiplikation der Taylor-Reihen:

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \dots$$

$$\cos(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \dots$$

⇒

$$e^{-t} \cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{1}{6} \right) t^3 + \dots$$

320 / 367

(ii) Komplexe Darstellung:

Formel von Euler-Moivre \implies

$$e^{-t} \cos(\omega t) = \operatorname{Re} \left(e^{(i\omega - 1)t} \right)$$

Einsetzen der Entwicklung der Exponentialfunktion \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} e^{-t} \cos(\omega t) &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\omega - 1)^k t^k}{k!} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(1 + (i\omega - 1)t + \frac{(i\omega - 1)^2}{2!} t^2 + \frac{(i\omega - 1)^3}{3!} t^3 + \dots \right) \\ &= 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2} t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{6} t^3 + \dots \end{aligned}$$

Division von Taylor-Reihen

Der Quotient zweier Taylor-Reihen

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x - a)^k / \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x - a)^k, \quad g_0 \neq 0,$$

kann durch Koeffizientenvergleich aus der Identität

$$\underbrace{(q_0 + q_1 u + \dots)}_{q(x)} (g_0 + g_1 u + \dots) = f_0 + f_1 u + \dots, \quad u = x - a,$$

bestimmt werden:

$$\begin{aligned} q_0 g_0 &= f_0 \implies q_0 = f_0 / g_0 \\ q_0 g_1 + q_1 g_0 &= f_1 \implies q_1 = (f_1 - q_0 g_1) / g_0 \\ &\dots, \end{aligned}$$

d.h. $q_n = (f_n - q_0 g_n - \dots - q_{n-1} g_1) / g_0$.

Beispiel

Taylor-Entwicklung des Tangens

Ansatz

$$\underbrace{(q_1x + q_3x^3 + q_5x^5 + \dots)}_{\tan x} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)}_{\cos x} = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}_{\sin x}$$

($q_0 = q_2 = \dots = 0$, da $\tan x$ ungerade)

Koeffizientenvergleich für die Monome x , x^3 und $x^5 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} q_1 &= 1, \\ -\frac{q_1}{2} + q_3 &= -\frac{1}{6} \implies q_3 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2} + q_5 &= \frac{1}{120} \implies q_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{24} + \frac{1}{6} = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

323 / 367

Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

Die Taylor-Koeffizienten der Umkehrfunktion $g(x)$ einer Funktion f mit $f'(a) \neq 0$ im Punkt $b = f(a)$ lassen sich durch Differentiation von

$$g(f(x)) = x$$

bestimmen:

$$g(b) = a$$

$$g'(b) f'(a) = 1 \rightsquigarrow g'(b)$$

$$g''(b) f'(a)^2 + g'(b) f''(a) = 0 \rightsquigarrow g''(b)$$

$$g'''(b) f'(a)^3 + 3g''(b) f''(a) f'(a) + g'(b) f'''(a) = 0 \rightsquigarrow g'''(b)$$

\vdots

Wie angedeutet können die entstehenden Gleichungen sukzessive nach den Ableitungen $g'(b)$, $g''(b)$, $g'''(b)$, ... aufgelöst werden.

324 / 367

Beispiel

Umkehrfunktion des Sinus

Entwickeln von

$$f(x) = \sin x, \quad g(y) = \arcsin y$$

in der Umgebung von $x = a = 0, y = b = 0$

Differenzieren von $g(\sin x) = x \rightsquigarrow$

$$g'(\sin x) \cos x = 1$$

$$g''(\sin x) \cos^2 x - g'(\sin x) \sin x = 0$$

$$g'''(\sin x) \cos^3 x - 3g''(\sin x) \cos x \sin x - g'(\sin x) \cos x = 0$$

Einsetzen von $x = 0, \cos 0 = 1, \sin 0 = 0 \rightsquigarrow$

$$g'(0) = 1$$

$$g''(0) - 0 = 0 \implies g''(0) = 0$$

$$g'''(0) - 0 - g'(0) = 0 \implies g'''(0) = g'(0) = 1$$

$$\implies \arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^5), \text{ ungerade Funktion}$$

325 / 367

Beispiel

Umkehrfunktion $q(y)$ des kubischen Polynoms

$$p(x) = x^3 - 2x$$

in einer Umgebung von $(x, y) \approx (a, b) = (2, 4)$

Differenzieren von $p(q(y)) = y \iff q(y)^3 - 2q(y) = y \rightsquigarrow$

$$3q^2 q' - 2q' = 1$$

$$6q(q')^2 + 3q^2 q'' - 2q'' = 0$$

$$6(q')^3 + 12qq'q'' + 6qq'q'' + 3q^2 q''' - 2q''' = 0$$

Auswertung bei $y = 4, q(4) = 2 \rightsquigarrow$

$$3 \cdot 4 \cdot q'(4) - 2q'(4) = 1 \implies q'(4) = 1/10$$

$$6 \cdot 2 \cdot (1/10)^2 + 3 \cdot 4 \cdot q''(4) - 2q''(4) = 0 \implies q''(4) = -3/250$$

$$6(1/10)^3 + 12 \cdot 2 \cdot (1/10) \cdot (-3/250) + 6 \cdot 2 \cdot (1/10) \cdot (-3/250)$$

$$+ 3 \cdot 4 \cdot q'''(4) - 2 \cdot q'''(4) = 0 \implies q'''(4) = 93/25000$$

326 / 367

erste Terme der Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}q(y) &= q(4) + q'(4)(y - 4) + \frac{q''(4)}{2}(y - 4)^2 + \frac{q'''(4)}{6}(y - 4)^3 + \dots \\ &= 2 + \frac{1}{10}(y - 4) - \frac{3}{500}(y - 4)^2 + \frac{31}{50000}(y - 4)^3 + \dots\end{aligned}$$

Test der Genauigkeit für $y \approx 4$, z.B. $y = 4.1$:

$$\begin{aligned}x = q(4.1) &\approx 2 + \frac{1}{10}(y - 4) - \frac{3}{500}(y - 4)^2 + \frac{31}{50000}(y - 4)^3 \\ &= 2 + \frac{1}{100} - \frac{3}{50000} + \frac{31}{50000000} \\ &= 2 + 0.01 - 0.00006 + 0.00000062 \\ &= 2.00994062\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow y \stackrel{!}{=} p(x) \approx p(2.00994062) \approx 4.100000078$ mit dem Fehler

$$\Delta y \approx 4.100000078 - 4.1 = 7.8 \cdot 10^{-8}$$

327 / 367

Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 + x)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2}x^2 + \dots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \pm \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \pm \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4^{2k} - 4^k}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

328 / 367

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\begin{aligned} \arccos x &= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots \right) \end{aligned} \quad |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \cdots \quad |x| < 1$$

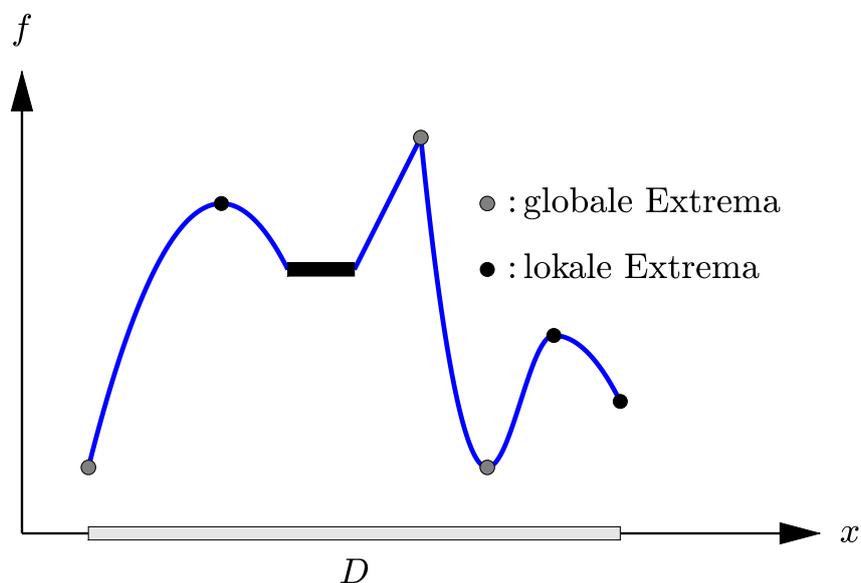
Extrema

Eine Funktion f hat in a ein globales Minimum auf einer Menge D , wenn

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

Bei einem lokalen Minimum ist der Funktionswert $f(a)$ nur in einer hinreichend kleinen Umgebung $(a - \delta, a + \delta) \subset D$ minimal.

Globales und lokales Maximum sind analog definiert.



Für eine stückweise stetig differenzierbare Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall können Extremwerte nur an kritischen Punkten auftreten:

- Nullstellen der Ableitung,
- Unstetigkeitsstellen der Ableitung,
- Randpunkten.

Globale Extrema lassen sich durch Vergleichen der Funktionswerte an diesen kritischen Punkten ermitteln.

Ob es sich bei einem kritischen Punkt a um ein lokales Extremum handelt, lässt sich mit Hilfe der zweiten Ableitung entscheiden. Ist f'' stetig und $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$), so handelt es sich um ein lokales Minimum (Maximum). Alternativ, oder falls $f''(a) = 0$, kann man $f(a)$ zur Typbestimmung mit zwei benachbarten Funktionswerten $f(a \pm h)$ vergleichen, wobei h kleiner als der Abstand zum nächsten kritischen Punkt gewählt wird.

Beweis

(i) Kritische Punkte:

lokales Minimum an einem inneren Punkt $a \implies$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \overbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}^{\geq 0} \geq 0$$

und

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \overbrace{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}^{\geq 0} \leq 0$$

$\implies f'(a) = 0$, d.h. an einem lokalen Extremum im Inneren des Definitionsbereichs ist entweder die Ableitung Null oder f ist dort nicht differenzierbar

\rightsquigarrow verbleibende Möglichkeiten für lokale Minima:

- innere Punkte an denen f nicht differenzierbar ist
- Randpunkte

(ii) Extremwerttest:

$f''(a) > 0$, Taylor-Entwicklung \implies

$$f(a \pm h) = f(a) \pm \underbrace{f'(a)}_{=0} h + \underbrace{\frac{f''(t)}{2}}_R h^2$$

mit $t \in [a - h, a + h]$

Stetigkeit von f''

$\implies R > 0$ für kleines h

\implies lokales Minimum bei a

Beispiel

Verschiedene Typen lokaler und globaler Extrema

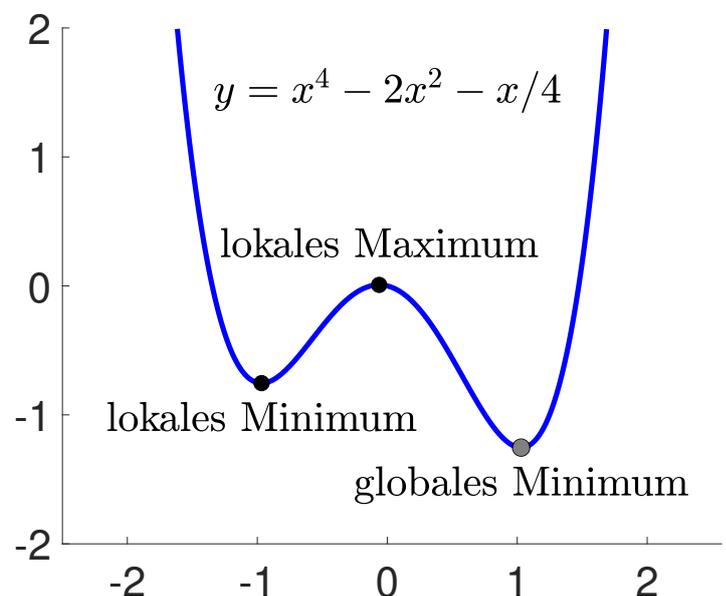
(i) $f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$, $D = \mathbb{R}$:

ein lokales und ein globales Minimum

ein lokales Maximum

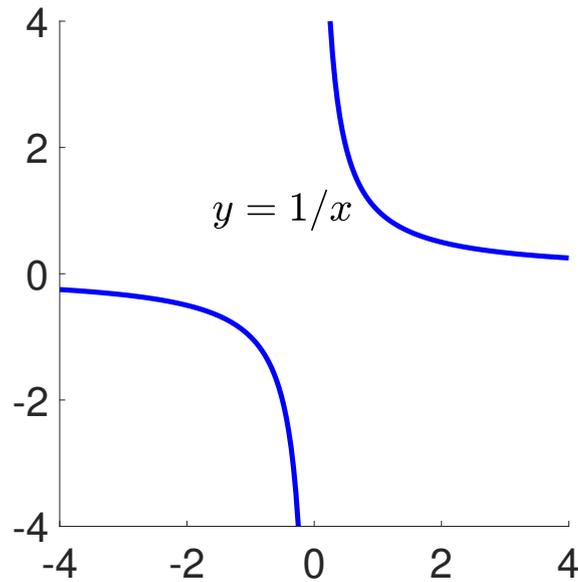
kein globales Maximum, da

$f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$



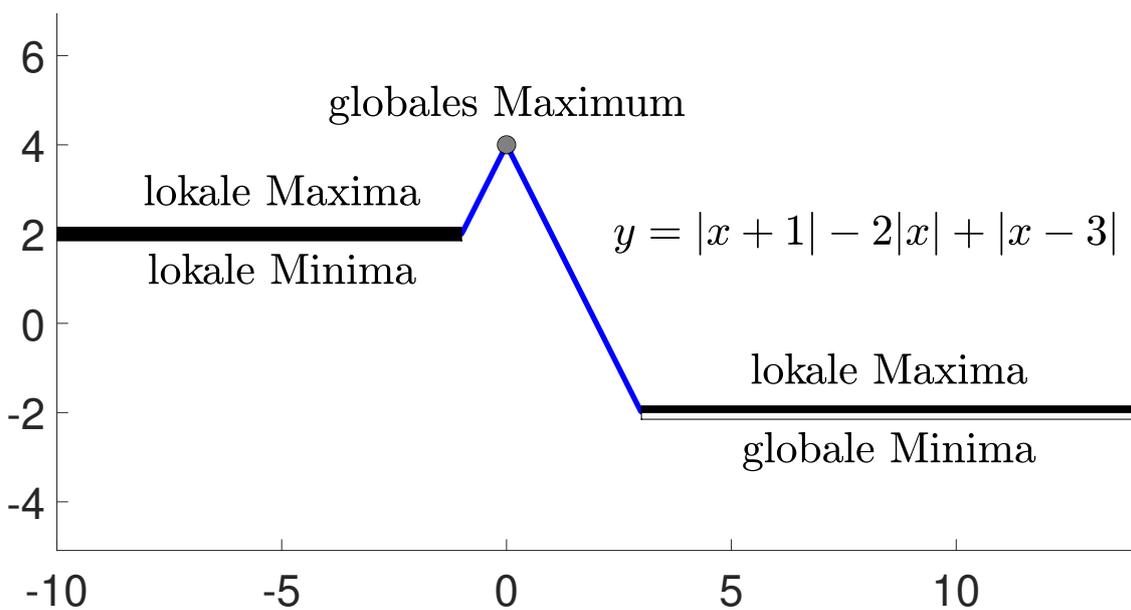
(ii) $f(x) = 1/x$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
 strikt monoton auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$
 \rightsquigarrow keine Extrema

$\inf_{x>0} f(x) = 0$ und $\sup_{x<0} f(x) = 0$ werden nicht angenommen



(iii) $f(x) = |x + 1| - 2|x| + |x - 3|$, $D = \mathbb{R}$:
 stückweise lineare Funktion \rightsquigarrow Extrema am Rand von
 Monotoniebereichen

Für Bereiche mit konstantem Wert sind alle Punkte lokale Extremstellen.



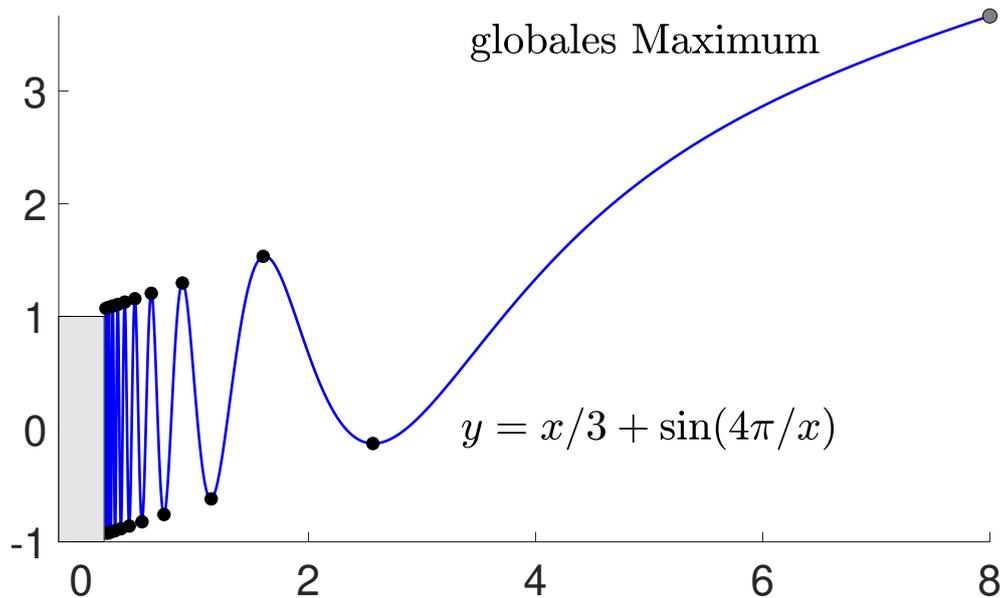
(iv) $f(x) = x/3 + \sin(4\pi/x)$, $D = (0, 8]$:

unter Umständen keine Extrema bei offenem oder halboffenem Definitionsbereich

nicht hebbare Definitionslücke am Randpunkt $x = 0$

Oszillationen des Sinus \implies

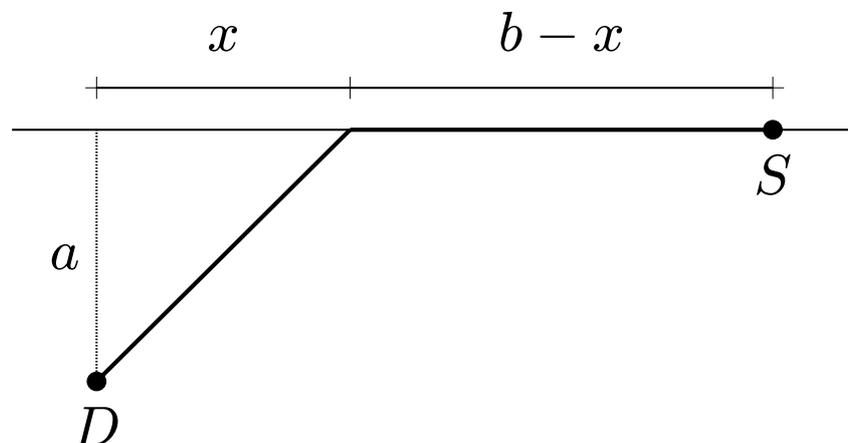
- unendlich viele lokale Extrema
- alle Punkte in $[-1, 1]$ sind Häufungspunkte (grauer Bereich)



337 / 367

Beispiel

Schnellstmögliche Verbindungsstraße vom Dorf D zur Stadt S bei Durchschnittsgeschwindigkeiten $v_A = 120$ km/h auf der Autobahn und $v_N = 60$ km/h auf der Nebenstrecke



338 / 367

Fahrtzeit

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_N + (b - x)/v_A, \quad 0 \leq x \leq b$$

Nullsetzen der Ableitung,

$$t'(x) = \frac{x}{v_N \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_A} \stackrel{!}{=} 0$$

↔

$$\begin{aligned} v_A x &= v_N \sqrt{a^2 + x^2} && \iff && \underbrace{(v_A/v_N)^2}_{=2} x^2 = a^2 + x^2 \\ &&& \iff && x_m = \sqrt{a^2/(4 - 1)} = a/\sqrt{3} \end{aligned}$$

Vergleich der Zeit mit den Zeiten an den Intervallendpunkten:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_A}, \quad t(0) = \frac{2a + b}{v_A}, \quad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_A}$$

$t(0) \geq t(x_m)$ ↔ nur $t(b)$ zu betrachten

339 / 367

x_m optimal, für $x_m = a/\sqrt{3} \leq b$, da

$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) &\iff 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ &\iff 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ &\iff a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

↔ minimale Zeit für

$$x = \min(x_m, b)$$

(Extremum am Rand für $x_m \geq b$)

340 / 367

Extremwerttest

Der Typ eines Extremwerts lässt sich mit Hilfe höherer Ableitungen entscheiden.

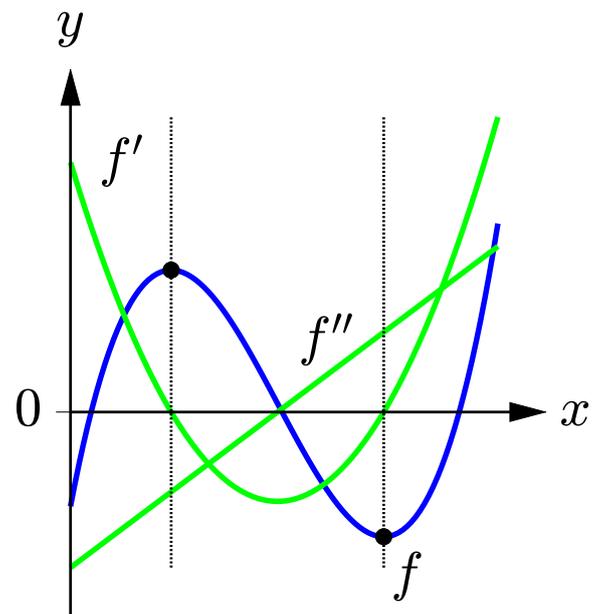
Ist f zweimal stetig differenzierbar und

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) > 0,$$

so hat f ein lokales Minimum bei a .
Entsprechend ist

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) < 0$$

eine hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum.



341 / 367

Verschwindet die zweite Ableitung an der Stelle a , so müssen höhere Ableitungen zur Entscheidung herangezogen werden. Gilt

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

so hat f in a genau dann eine Extremstelle, wenn n gerade ist. In diesem Fall hat f in a ein lokales Minimum bzw. Maximum, wenn $f^{(n)}(a) > 0$ bzw. $f^{(n)}(a) < 0$ ist.

342 / 367

Beweis

$$f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \implies$$

konstantes Taylor-Polynom vom Grad $n - 1$ ($= f(a)$) an der Stelle a
Restglied

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!} (x - a)^n$$

mit t zwischen a und x

x nahe bei $a \implies$

gleiches Vorzeichen von $f^{(n)}(t)$ und $f^{(n)}(a)$

- n ungerade:

Vorzeichenwechsel des Restgliedes beim Übergang von $x < a$ zu $x > a$

\rightsquigarrow kein Extremum

- n gerade: $(x - a)^n > 0$ für $x \neq a$

$$\text{sign}(f(x) - f(a)) = \text{sign } f^{(n)}(a)$$

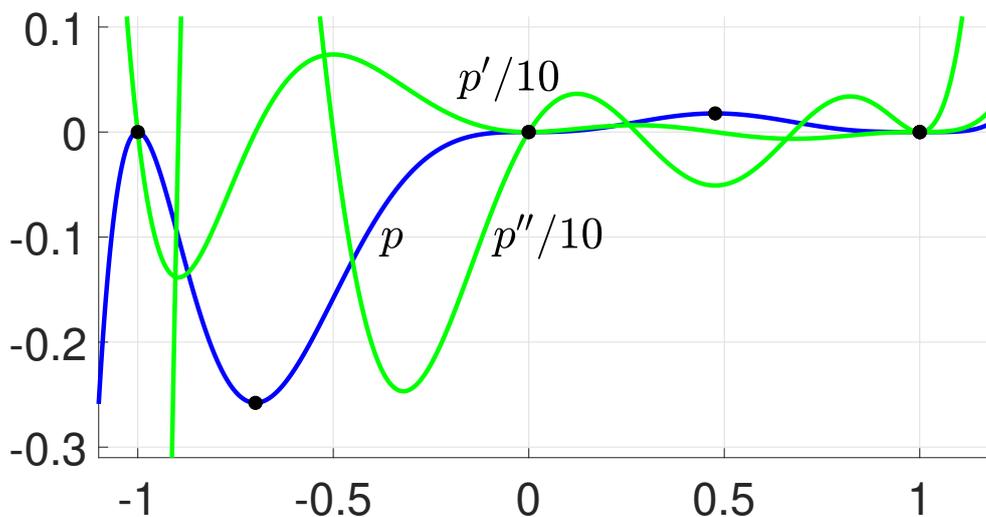
\rightsquigarrow lokales Minimum (Maximum) für $f^{(n)}(a) > 0$ ($f^{(n)}(a) < 0$)

343 / 367

Beispiel

Extrema des Polynoms

$$p(x) = (x + 1)^2 x^3 (x - 1)^4$$



344 / 367

keine globalen Extrema, da

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \pm\infty$$

(i) Nullstellen der Ableitung bei $x = -1, 0, 1$:

- $p'(-1) = 0$

$$p''(-1) = 2x^3(x-1)^4|_{x=-1} = 2(-1)^3(-2)^4 < 0$$

\implies lokales Maximum, Funktionswert 0

- $p'(0) = 0$:

$$p''(0) = 0, \quad p'''(0) \neq 0$$

\implies kein Extremwert (ungerade Ordnung der ersten nicht trivialen Ableitung)

- $p'(1) = 0$:

$$p''(1) = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 \cdot 1^3 \cdot 4! > 0$$

\implies lokales Minimum (gerade Ordnung der ersten nicht trivialen Ableitung), Funktionswert 0

345 / 367

(ii) Weitere Nullstellen von p' :

$$p(-1) = p(0) = p(1) = 0$$

\implies mindestens je eine weitere lokale Extremstelle in $(-1, 0)$ und $(0, 1)$

Grad $p' = 8$, Gesamtvielfachheit der Nullstellen von p' bei $-1, 0, 1$ gleich $1 + 2 + 3 = 6$

\implies Ableitung an genau zwei Stellen $s \in (-1, 0)$ und $t \in (0, 1)$ Null

Typ der Extrema bei $\pm 1 \implies$

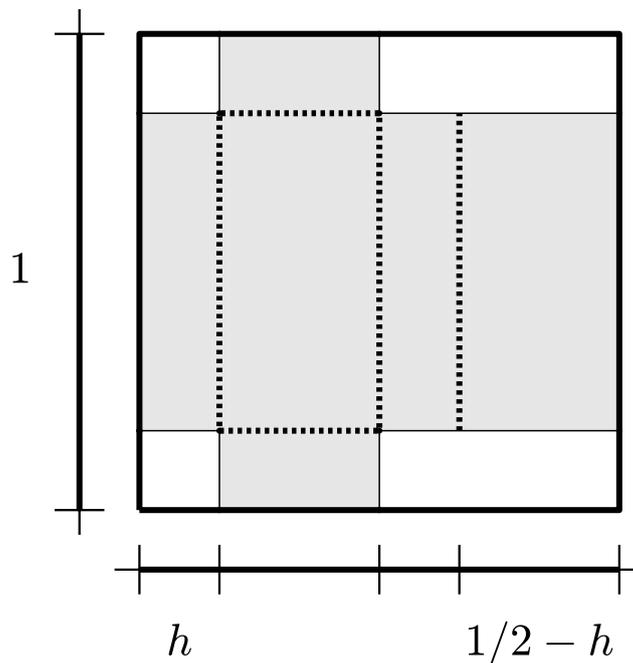
- lokales Minimum bei s , da $p(-1) = 0$, $p < 0$ auf $(-1, 0)$

- lokales Maximum bei t $p(1) = 0$, $p > 0$ auf $(0, 1)$

346 / 367

Beispiel

Schachtel möglichst großen Volumens gemäß dem abgebildeten Schnitt/Falt-muster



347 / 367

Volumen

$$V(h) = \underbrace{(1 - 2h)}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1 - 2h)/2}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

Nullsetzen der Ableitung,

$$V'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

bzw. $h^2 - (2/3)h + 1/12 \stackrel{!}{=} 0 \rightsquigarrow$

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4-1}{36}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

geometrisch sinnvoll: $h = 1/6$ mit

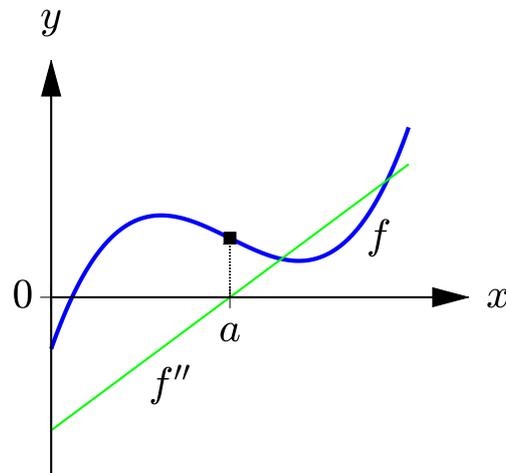
$$V(1/6) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$$

Maximum auf dem zulässigen Bereich $h \in [0, 1/2]$, denn $V \geq 0$ und $V(0) = V(1/2) = 0$

348 / 367

Wendepunkte

An einem Wendepunkt a einer Funktion f wechselt die zweite Ableitung das Vorzeichen. Der Punkt a trennt einen konvexen und konkaven Bereich des Graphen von f .

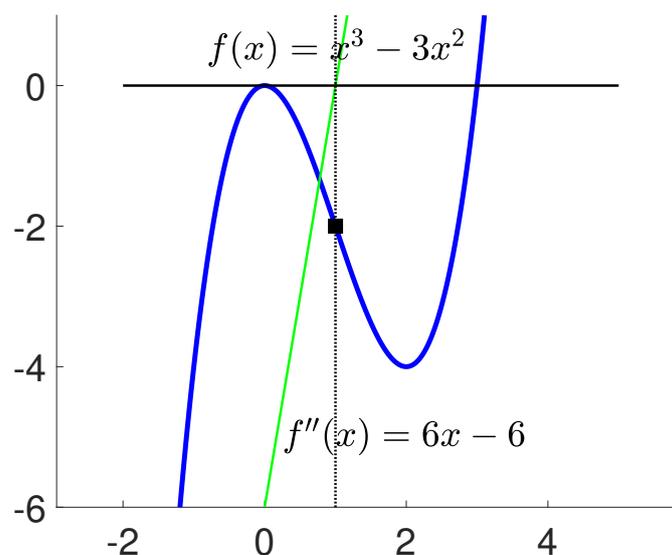


Für eine glatte Funktion ist notwendig, dass $f''(a) = 0$ und hinreichend, dass zusätzlich $f'''(a) \neq 0$.

349 / 367

Beispiel

Wendepunkt eines kubischen Polynoms



lineare zweite Ableitung

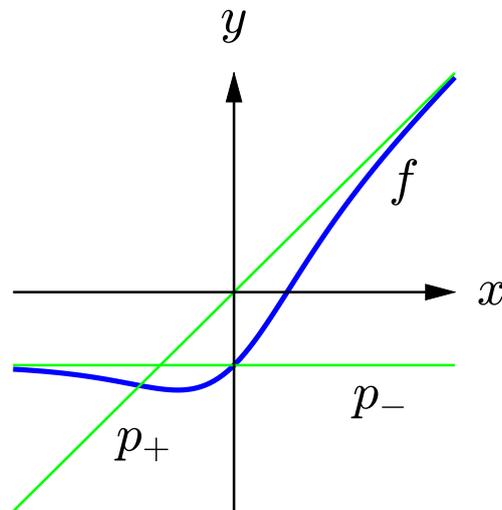
\implies Existenz genau eines Wendepunktes

350 / 367

Asymptoten

Eine Gerade $g : y = p(x) = ax + b$ ist eine Asymptote von f , wenn

$$f(x) - p(x) \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \rightarrow \infty \quad \text{oder} \quad x \rightarrow -\infty.$$



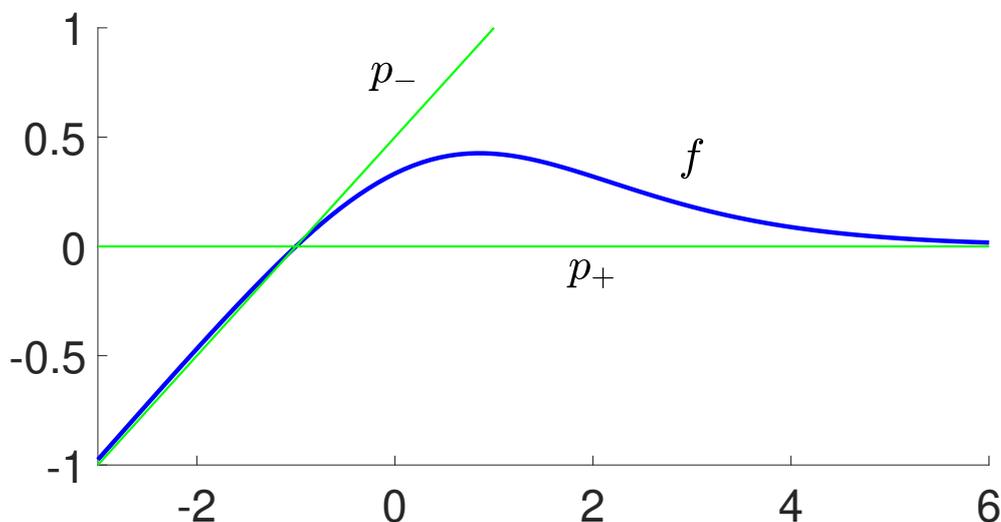
Besitzt eine Funktion eine Asymptote, so kann ihr Graph für große x durch die Gerade g approximiert werden.

351 / 367

Beispiel

Asymptoten der Funktion

$$f(x) = \frac{x + 1}{2 + e^x}$$



352 / 367

(i) $x \rightarrow \infty$:

Erweitern mit $e^{-x} \rightsquigarrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2+e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1) \cdot e^{-x}}{2 \cdot e^{-x} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

\rightsquigarrow Asymptote

$$p(x) = 0 \quad (x - \text{Achse})$$

(ii) $x \rightarrow -\infty$:

$e^x \rightarrow 0 \rightsquigarrow$ Asymptote

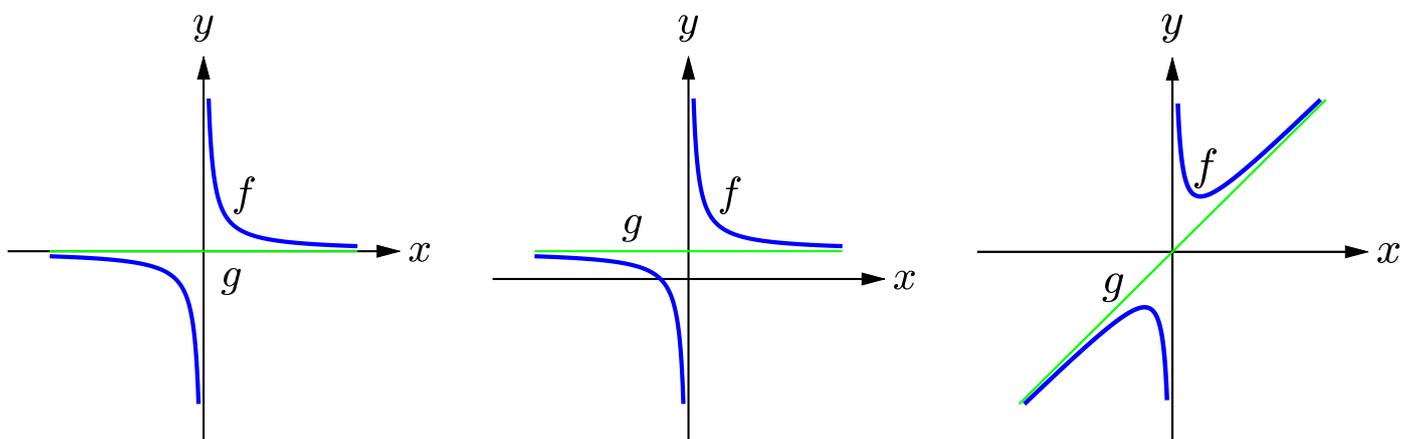
$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

Asymptoten rationaler Funktionen

Eine rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \dots + p_0}{q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \dots + q_0}$$

hat eine Asymptote $g : y = a(x) = a_1 x + a_0$, falls $\text{Grad } p \leq \text{Grad } q + 1$.



Die Abbildung illustriert die verschiedenen möglichen Fälle.

- Grad $p < \text{Grad } q$:
Die x -Achse ist Asymptote:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} r(x) = 0.$$

- Grad $p = \text{Grad } q$:
Die rationale Funktion r besitzt eine waagrechte Asymptote

$$a_1 = 0, a_0 = p_m/q_n \quad (m = n).$$

- Grad $p = \text{Grad } q + 1$:
Es existiert eine lineare Asymptote, die mit Hilfe von Polynomdivision bestimmt werden kann:

$$p(x)/q(x) = (a_1x + a_0) + \text{Rest}.$$

Man erhält $a_1 = p_m/q_n$, $a_0 = p_{m-1}/q_n - p_m q_{n-1}/q_n^2$ mit $m = n + 1$.

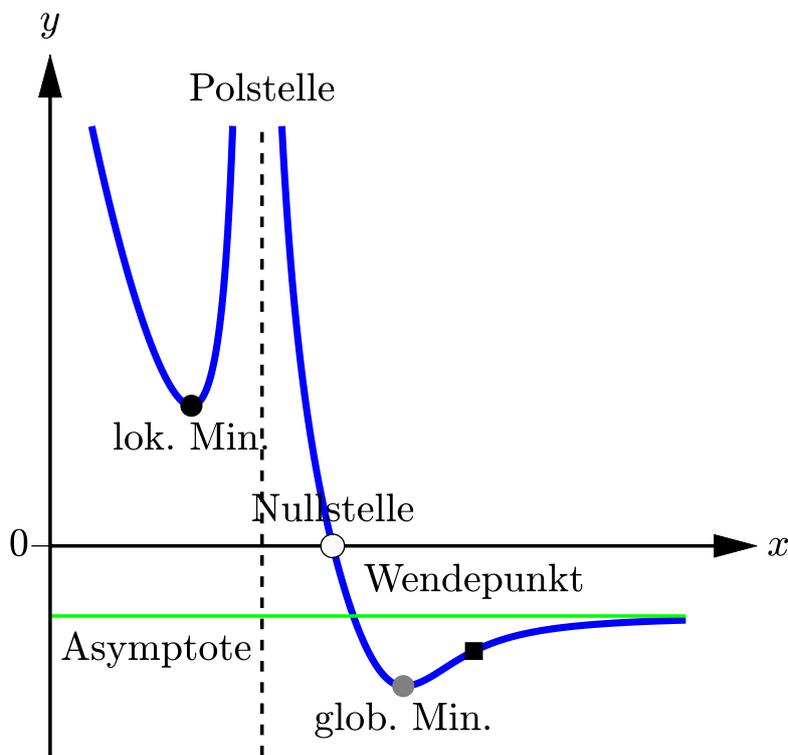
Falls $\text{Grad } p > \text{Grad } q + 1$, so besitzt r keine Asymptote. Die rationale Funktion wächst in diesem Fall mindestens quadratisch für $x \rightarrow \pm\infty$.

Funktionsuntersuchung

Zur Beurteilung des qualitativen Verhaltens einer Funktion können folgende Merkmale herangezogen werden:

- Symmetrien
- Periodizität
- Unstetigkeitsstellen, insbesondere Polstellen
- Nullstellen (\rightarrow Vorzeichen)
- Extrema (\rightarrow Monotoniebereiche)
- Wendepunkte (\rightarrow Konvexitätsbereiche)
- Asymptoten

Eine entsprechende Analyse der Funktion wird als Funktionsuntersuchung bezeichnet.



Beispiel

Funktionsuntersuchung der Funktion

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin(3x)$$

(i) Symmetrie:

ungerade, da $\sin x = -\sin(-x)$

(ii) Periodizität:

Periode $2\pi \rightsquigarrow$ betrachte nur das Intervall $[-\pi, \pi]$

(iii) Unstetigkeitsstellen, insbesondere Polstellen:

keine

(iv) Nullstellen:

Additionstheorem $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \rightsquigarrow$

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3} \sin^2 x \right)}_{\neq 0}$$

\implies Nullstellen bei 0 und $\pm\pi$

(v) Extrema:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \rightsquigarrow$$

$$f'(x) = 2 \cos x - 4 \sin^2 x \cos x = -2 \cos x + 4 \cos^3 x = 2 \cos x (2 \cos^2 x - 1)$$

Null für $\cos x = 0$ oder $\cos x = \pm 1/\sqrt{2} \rightsquigarrow$ mögliche Extrema bei

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4$$

Periodizität \rightsquigarrow keine Randwerte zu untersuchen

Vorzeichen der zweiten Ableitung

$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x = 2 \sin x (1 - 6 \cos^2 x)$$

und Vergleich der Funktionswerte \rightsquigarrow Typ der Extrema

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

359 / 367

(vi) Wendepunkte:

Umformung der zweiten Ableitung, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x = -10 \sin x + 12 \sin^3 x \\ &= 2 \sin x (6 \sin^2 x - 5) \end{aligned}$$

Null für $\sin x = 0$ oder $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$, d.h.

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung bzw. dritte Ableitung ungleich

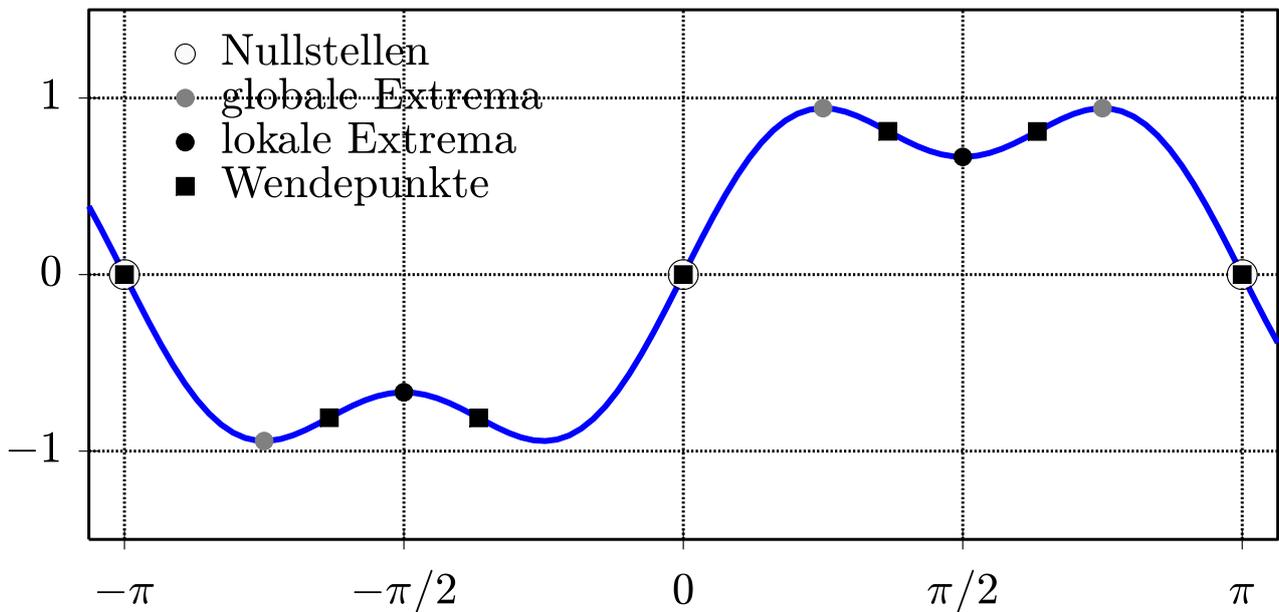
Null \rightsquigarrow Wendepunkte bei

$$(0, 0), (\pm\pi, 0), (-1.99, -0.81), (-1.15, -0.81), (1.15, 0.81), (1.99, 0.81)$$

(vii) Asymptoten:

keine, da f periodisch und nicht konstant

360 / 367



Beispiel

Funktionsuntersuchung der Funktion

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$$

(i) Symmetrie:

ungerade, da Quotient aus ungeradem Zähler und geradem Nenner

(ii) Periodizität:

nicht periodisch

(iii) Unstetigkeitsstellen, insbesondere Polstellen

einfache Polstellen bei ± 1 (Nenner Null, Zähler ungleich Null)

(iv) Nullstellen:

Zähler $x(5x^2 + 4)$ Null bei $x = 0$

(v) Extrema:
erste Ableitung

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 4)(5x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} \stackrel{!}{=} 0$$

↪ mögliche Extrema bei $x = \pm 2$

einfache Pole (Vorzeichenwechsel) ↪ keine globalen Extrema

$f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow -1$

⇒ lokales Maximum in $(-\infty, -1)$

analoges Argument ↪ lokales Minimum in $(1, \infty)$

↪ lokale Extrema an den beiden Nullstellen der Ableitung

lokales Maximum: $(-2, 16)$, lokales Minimum: $(2, 16)$

(vi) Wendepunkte:

zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{18x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} \stackrel{!}{=} 0$$

↪ Wendepunkt $(0, 0)$, da die zweite Ableitung das Vorzeichen wechselt bzw. die dritte Ableitung nicht Null ist

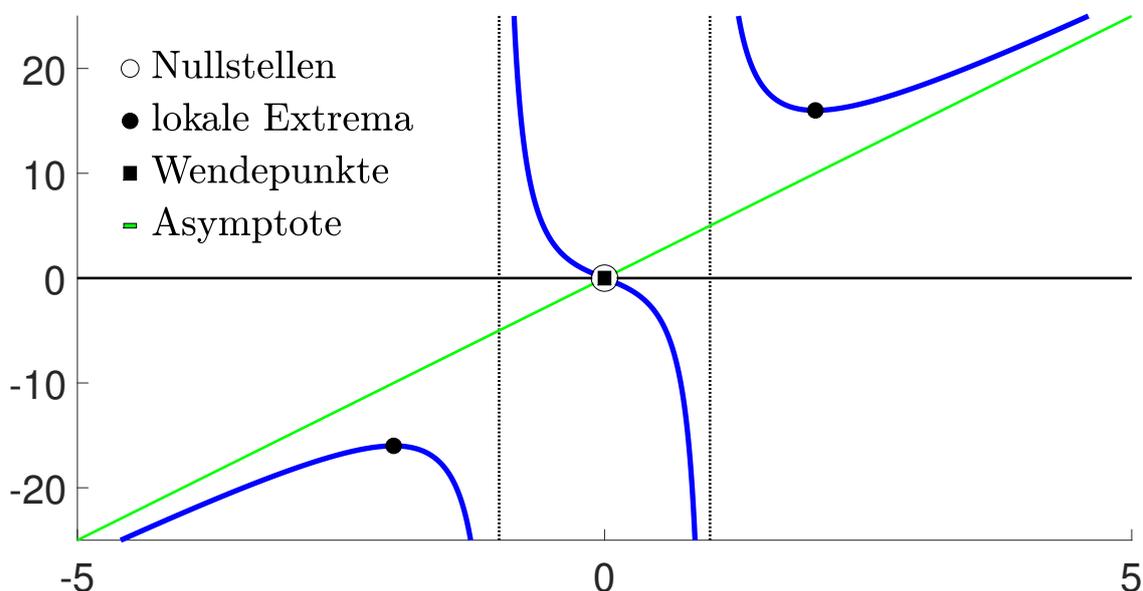
363 / 367

(vii) Asymptoten:

Polynomdivision ↪

$$f(x) = \frac{5x^3 - 5x + 9x}{x^2 - 1} = 5x + \frac{9x}{x^2 - 1}$$

Asymptote: $p(x) = 5x$



364 / 367

Funktionsuntersuchung der Funktion

$$f(x) = |x^2 - 1|e^{-4x/3}$$

(i) Qualitatives Verhalten:

keine Symmetrien und nicht periodisch

Unstetigkeitsstellen der Ableitung (Knicke) bei $x = \pm 1$ aufgrund des Knicks der Betragsfunktion bei dem Argument 0

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^r \exp(-sx) = 0$ für alle $r, s > 0 \implies p(x) = 0$ ist

Asymptote für $x \rightarrow \infty$

keine Asymptote für $x \rightarrow -\infty$, da $\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x)/x| = \infty$

(ii) Nullstellen:

Positivität der Exponentialfunktion \rightsquigarrow Nullstellen bei $x_{1,2} = \pm 1$

globale Minima an diesen Punkten, da $f \geq 0$

kein globales Maximum wegen $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

365 / 367

(iii) Extrema:

$f(-1) = f(1) = f(\infty) = 0 \implies$ mindestens jeweils ein lokales Maximum in den Intervallen $(-1, 1)$ und $(1, \infty)$

Ableiten von

$$f(x) = \sigma(x^2 - 1)e^{-4x/3}, \quad x \neq \pm 1,$$

mit $\sigma = -1$ für $x \in (-1, 1)$ und $\sigma = 1$ für $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightsquigarrow$

$$f'(x) = \sigma \left[-4x^2/3 + 4/3 + 2x \right] e^{-4x/3}$$

$[...] = 0 \rightsquigarrow$ kritische Punkte $x_3 = -1/2$ und $x_4 = 2$

lokale Maxima wegen der Existenz von mindestens zwei solcher Extrema
Funktionswerte

$$y_3 = \frac{3}{4}e^{-2/3} \approx 1.4608, \quad y_4 = 3e^{-8/3} \approx 0.2085$$

(iv) Wendepunkte:

$$f''(x) = \sigma \left[16x^2/9 - 16x/3 + 2/9 \right] e^{-4x/3}$$

Wendepunkte an den Nullstellen

$$x_5 = 3/2 - \sqrt{34}/4 \approx 0.0423, \quad x_6 = 3/2 + \sqrt{34}/4 \approx 2.9577$$

von [...], da f'' dort das Vorzeichen wechselt

Funktionswerte: $y_5 \approx 0.9435$, $y_6 \approx 0.1501$

