Cauchy-Kriterium

Eine Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein n_ε existiert, so dass

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

für alle $j, k > n_\varepsilon$.
Mit Hilfe dieses auf Cauchy zurückgehenden Kriteriums ist der Nachweis der Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwerts möglich.

Beweis

(i) Notwendigkeit des Cauchy-Kriteriums:

Definition des Grenzwerts $\quad \Longrightarrow$

$$a = \lim a_n \quad \Longleftrightarrow \quad |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_\varepsilon$$

$n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2} \quad \Longrightarrow$

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

fr $j, k > n_\varepsilon$

(ii) Cauchy Kriterium hinreichend:

Der Beweis benutzt die Vollständigkeit der reellen Zahlen.

Beispiel

Geometrische Konvergenz ($\Longrightarrow$ Cauchy-Kriterium):

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n, \quad q \in [0,1)$$

(i) Folgerung des Cauchy-Kriteriums aus der geometrischen Konvergenzbedingung:
Bedingung, Formel für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} |a_j - a_k| &\le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \cdots + |a_{k-1} - a_k| \\ &\le cq^j\,(1 + q + q^2 + \cdots) \le \frac{cq^j}{1-q} \end{aligned}$$

für $j < k$
rechte Seite $< \varepsilon$ für $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$, denn

$$\frac{cq^j}{1-q} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad q^j < \frac{\varepsilon(1-q)}{c} \quad \Longleftrightarrow \quad j \underbrace{\ln q}_{<0} < \ln(\varepsilon(1-q)/c)$$

(ii) Anwendung auf rekursiv definierte Folgen:
Beispiel: $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1$
zeige geometrische Konvergenz mit vollständiger Induktion

Induktionsanfang ($n = 0$):

$$|a_1 - a_0| \le c \quad \rightsquigarrow \quad c = |a_1 - a_0|$$

Induktionsschluss ($n \to n + 1$):
Umformung der Differenz mit Hilfe der dritten binomischen Formel

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left| \frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}} \right|$$

Induktions-Voraussetzung $|a_n - a_{n-1}| \le cq^{n-1}$, $a_k \ge 0 \quad \rightsquigarrow$

$$|a_{n+1} - a_n| \le \frac{1}{2\sqrt{2}}\, cq^{n-1} = cq^n$$

bei Wahl von $q = 1/(2\sqrt{2})$