Binomialreihe

Die Funktion

$$f(x) = (1+x)^s$$

mit $s \in \mathbb{R}$ besitzt die Taylor-Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k = 1 + sx + \frac{s(s-1)}{2!}x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}x^3 + \cdots .$$

Dabei bezeichnet

$$\binom{s}{k} = \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

den verallgemeinerten Binomialkoeffizient.
Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$.

Beweis

$s = 0$: triviale Reihe

$s \in \mathbb{N}$: binomische Formel, $\binom{s}{k} = 0$ für $k > s$

Ableitungen für $s \notin \mathbb{N}_0$

$$f^{(k)}(x) = s(s-1) \cdot (s-k+1)(1+x)^{s-k}$$

$\rightsquigarrow$ Taylor-Koeffizienten

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{s}{k}$$

Quotientenkriterium (Konvergenz von $\sum_k a_k$, falls $\lim_{k\to\infty} q_k < 1$, $q_k = |a_{k+1}/a_k|$) mit

$$q_k = \frac{|c_{k+1}x^{k+1}|}{|c_k x^k|} = |x| \left| \binom{s}{k+1} \Big/ \binom{s}{k} \right| = |x| \frac{|s-k|}{k+1}$$

$\rightsquigarrow$ Konvergenz für $|x| < 1$, denn $\lim_{k\to\infty} q_k = |x|$