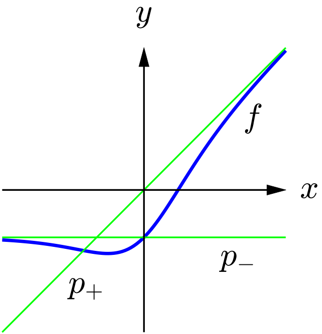
Asymptoten

Eine Gerade $g: \ y = p(x) = ax + b$ ist eine Asymptote von f, wenn

$$f(x) - p(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty \text{ oder } x \to -\infty\,.$$

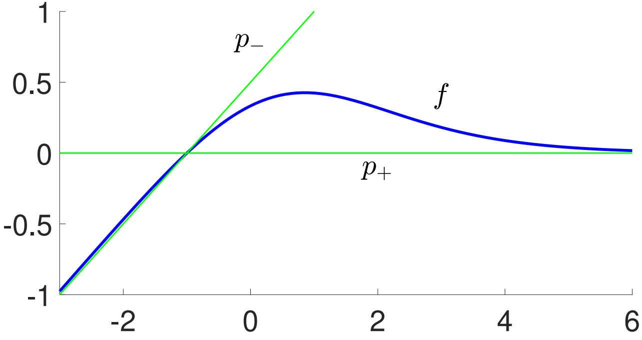


Besitzt eine Funktion eine Asymptote, so kann ihr Graph für große x durch die Gerade g approximiert werden.

Beispiel

Asymptoten der Funktion

$$f(x) = \frac{x+1}{2+\mathrm{e}^x}$$



(i) $x \to \infty$:
Erweitern mit e^{-x} $\rightsquigarrow$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2+\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$\rightsquigarrow$ Asymptote

$$p(x) = 0 \quad (x - \text{Achse})$$

(ii) $x \to -\infty$:
$\mathrm{e}^x \to 0$ $\rightsquigarrow$ Asymptote

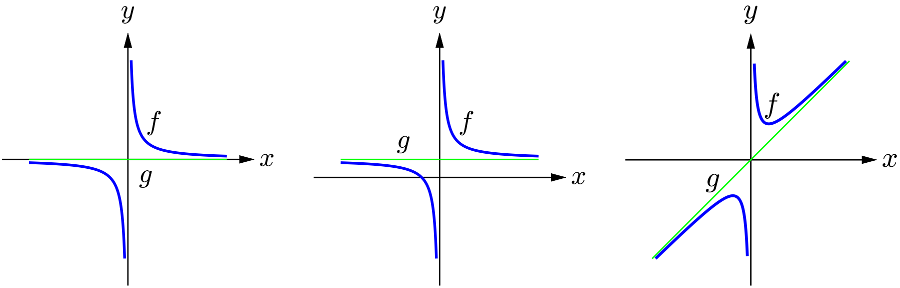
$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

Asymptoten rationaler Funktionen

Eine rationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p_m x^m + p_{m-1} x^{m-1} + \cdots + p_0}{q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \cdots + q_0}$$

hat eine Asymptote $g: \; y = a(x) = a_1 x + a_0$, falls Grad $p \leq$ Grad $q + 1$.



Die Abbildung illustriert die verschiedenen möglichen Fälle.

- Grad $p <$ Grad q:
  Die x-Achse ist Asymptote:

$$\lim_{x \to \pm\infty} r(x) = 0\,.$$

- Grad $p =$ Grad q:
  Die rationale Funktion r besitzt eine waagrechte Asymptote

$$a_1 = 0,\ a_0 = p_m / q_n \quad (m = n)\,.$$

- Grad $p =$ Grad $q + 1$:
  Es existiert eine lineare Asymptote, die mit Hilfe von Polynomdivision bestimmt werden kann:

$$p(x)/q(x) = (a_1 x + a_0) + \mathrm{Rest}\,.$$

  Man erhält $a_1 = p_m/q_n$, $a_0 = p_{m-1}/q_n \, - \, p_m q_{n-1}/q_n^2$ mit $m = n + 1$.

Falls Grad $p >$ Grad $q + 1$, so besitzt r keine Asymptote. Die rationale Funktion wächst in diesem Fall mindestens quadratisch für $x \to \pm\infty$.