Additionstheoreme für Sinus und Kosinus

Für die Kreisfunktionen sin und cos gelten folgende Beziehungen:

- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$

Insbesondere ist

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

und eine äquivalente Form der ersten dieser beiden Identitäten ist

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha\,.$$

Beweis

(i) Kosinus:

Formel von Euler-Moivre

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right), \quad \sin t = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) \cdot \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}) \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta-\alpha)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\alpha-\beta)}\right) \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}) \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta-\alpha)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\alpha-\beta)}\right)
\end{aligned}$$

Subtraktion $\rightsquigarrow$ Aufhebung der Terme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)}$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha-\beta)}$, d.h.

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\alpha+\beta)}) = \cos(\alpha+\beta)$$

setzen von $\beta = \alpha \quad \rightsquigarrow$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

bzw. mit $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\cos(2\alpha) = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

(ii) Sinus:

Beweis der Formel für $\sin(\alpha + \beta)$ analog

Alternativ:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha+\beta-\pi/2) \\ &= \cos\alpha\cos(\beta-\pi/2) - \sin\alpha\sin(\beta-\pi/2) \end{aligned}$$

$\cos(\beta - \pi/2) = \sin\beta$, $\sin(\beta - \pi/2) = -\cos\beta$

$\rightsquigarrow \quad$ Formel für $\sin(\alpha + \beta)$