Absolute Konvergenz

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

so bezeichnet man $\sum_n a_n$ als absolut konvergent.
Aus dieser stärkeren Form der Konvergenz folgt, dass die Reihe auch bei einer beliebigen Änderung der Summationsreihenfolge konvergent ist.

Beweis

(i) Konvergenz:
Cauchy-Kriterium, angewandt auf die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^n |a_k| \quad \Longrightarrow$

$$\exists n_\varepsilon : |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n, m > n_\varepsilon \quad (n < m)$$

Dreiecksungleichung $\quad \rightsquigarrow \quad$ Abschätzung für die Differenzen der Partialsummen:

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n, m > n_\varepsilon$$

$\Longrightarrow \quad$ Konvergenz von $\sum_k a_k$

(ii) Konvergenz nach Umordnung:
Beschreibung einer Änderung der Summationsreihenfolge durch eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k, \quad \tilde{a}_k = a_{f(k)}$$

indirekter Beweis der behaupteten Konvergenz von $\tilde{s}_n = \sum_{k=0}^{n} |\tilde{a}_k|$, d.h.

$$\underbrace{(\text{Konvergenz von } s_n)}_{\text{Voraussetzung}} \wedge \underbrace{(\text{Divergenz von } \tilde{s}_n)}_{\text{negierte Behauptung}} \quad \Longrightarrow \quad \text{Widerspruch}$$

Divergenz von $\tilde{s}_n \quad \Longleftrightarrow \quad$ Unbeschränktheit der Folge $\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \ldots$

$$\tilde{s}_n = |a_{f(1)}| + \cdots + |a_{f(n)}| \geq s_{N(n)} = |a_1| + \cdots + |a_{N(n)}|, \quad N(n) = \max_{k \leq n} f(k)$$

$\Longrightarrow \quad$ Unbeschränktheit der Teilfolge $s_{N(1)}, s_{N(2)}, \ldots$ der Partialsummen von $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$
$\Longrightarrow \quad$ Widerspruch zur vorausgesetzten absoluten Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$