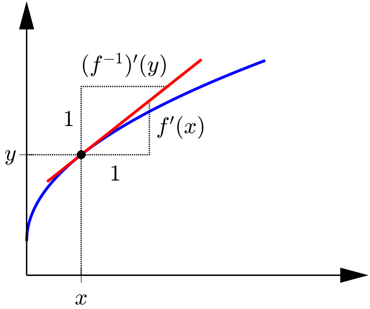
Ableitung der Umkehrfunktion

Eine stetig differenzierbare Funktion f mit $f'(x) \neq 0$ ist in einer Umgebung von x invertierbar, und für die Umkehrfunktion f^{-1} gilt

$$(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$$

bzw. $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^{-1}$; die Steigungen von f und f^{-1} sind reziprok.



Beweis

$f'(x) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ strikte Monotonie von f in einer Umgebung von x und damit lokale Invertierbarkeit

setze $g = f^{-1}$

Definition der Umkehrfunktion $\quad \Longrightarrow$

$$x = g(f(x))$$

Differentiation mit der Kettenregel $\quad \rightsquigarrow$

$$1 = g'(f(x))f'(x)$$

$\rightsquigarrow \quad$ Formel für g' mit $y = f(x)$

Ableitung der Umkehrfunktionen von Tangens und Kotangens

(i) Tangens:

Quotientenregel $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x\right)\cos x - \sin x\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x\right)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion, $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$ $\implies$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x$$

Darstellung als Funktion von y

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + y^2$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \arctan y = \frac{1}{1+y^2}$$

(ii) Kotangens:

$y \to x = g(y) = \operatorname{arccot} y$: Umkehrfunktion von $x \to y = \cot x$

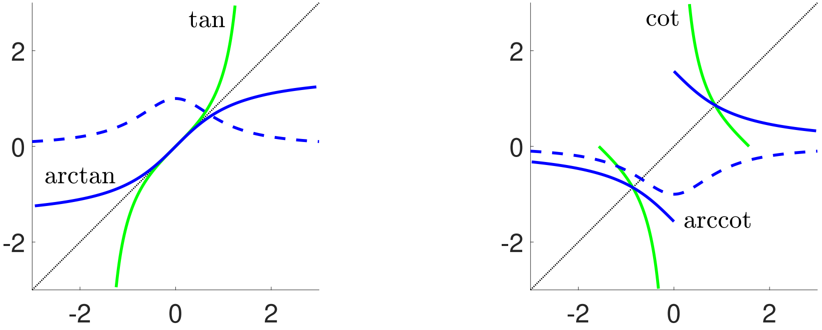
$f(x) = \tan x$, $\cot x = 1/f(x)$

Kettenregel, angewandt auf $x = g(1/f(x)) \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} 1 &= g'(y) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{f(x)} = g'(y) \left(-\frac{1}{f(x)^2}\right) f'(x) \\ &= g'(y) \left(-\frac{1}{\sin^2 x / \cos^2 x}\right) \frac{1}{\cos^2 x} = g'(y) \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) \end{aligned}$$

$\sin^2 x = 1/(1 + \cos^2 x / \sin^2 x) = 1/(1 + \cot^2 x) = 1/(1+y^2) \quad \Longrightarrow$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \operatorname{arccot} y = g'(y) = -\sin^2 x = -\frac{1}{1+y^2}$$

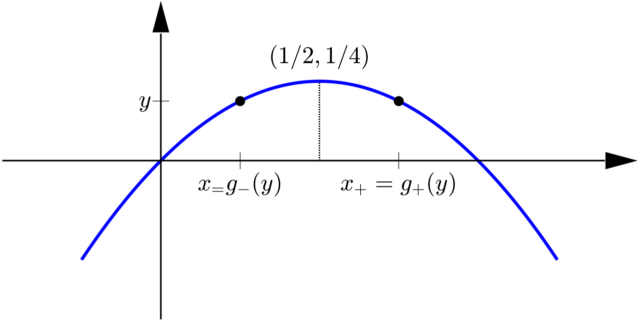


Tangens und Kotangens, die Umkehrfunktionen und deren Ableitungen (gestrichelt)

Beispiel

Umkehrfunktionen g von $y = f(x) = x\,(1 - x)$

verschiedene Zweige $g_\pm$ auf den Monotonieintervallen $(-\infty, 1/2]$ und $[1/2, \infty)$



Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion $\implies$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}$$

nochmaliges Differenzieren mit Hilfe der Kettenregel $\rightsquigarrow$

$$g''(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-2x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2}{(1-2x)^2}\,\frac{1}{1-2x}$$

z.B. $x = 1, y = 0$ (rechter Zweig: $1 = g_+(0)$) $\rightsquigarrow$

$$g_+'(0) = \frac{1}{1-2} = -1, \quad g_+''(0) = \frac{2}{(1-2)^2}\,\frac{1}{1-2} = -2$$

Überprüfung durch explizite Berechnung der Umkehrfunktionen:

$$x^2 - x + y = 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_\pm(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}$$

Auswertung der Ableitungen:

$$\begin{aligned} g_+'(0) &= -\frac{1}{2}\,(1/4 - y)^{-1/2}\Big|_{y=0} = -\frac{1}{2}\cdot 2 \\ g_+''(0) &= -\frac{1}{4}\,(1/4 - y)^{-3/2}\Big|_{y=0} = -\frac{1}{4}\cdot 8 \end{aligned}$$