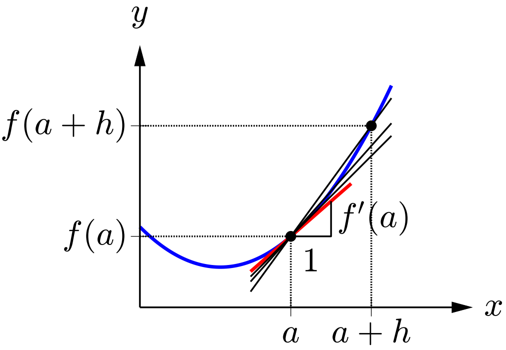
Ableitung

Eine Funktion f ist in einem Punkt a differenzierbar, wenn der als Ableitung bezeichnete Grenzwert

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existiert.



Geometrisch bedeutet Differenzierbarkeit, dass die Steigungen der Sekanten gegen die Steigung der durch

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

gegebenen Tangente konvergieren.
Man schreibt auch

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}$$

mit $y = f(x)$. Diese Schreibweise symbolisiert den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ in dem Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}\,.$$

Höhere Ableitungen werden mit $f'', f''', \ldots$ bzw. $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ bezeichnet.
Eine Funktion f heißt differenzierbar auf einer Menge D, wenn $f'(x)$ für alle $x \in D$ existiert.

Beispiel

Ableitung von Monomen

(i) Ableitung von $f(x) = x^2$:
Definition $\quad\rightsquigarrow$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

$f''(x) = 2$

(ii) Beliebiges Monom $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$:
binomische Formel $\quad\rightsquigarrow$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1}$$

$O(h^2)$: Terme mit Faktoren h^2

Beispiel

Ableitung von $f(x) = \sin x$:

Additionstheorem $\quad \Longrightarrow$

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

$t = x + h/2 \quad \rightsquigarrow \quad$ Umformung des Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin\big((x+h/2)+h/2\big) - \sin\big((x+h/2)-h/2\big)}{h} \\ &= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h} \end{aligned}$$

rechte Seite $\to \cos x$ für $h \to 0$, da

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

Linearität der Ableitung

Die Ableitung ist linear, d.h. für differenzierbare Funktionen f und g gilt

$$\begin{aligned} (r\,f)' &= r\,f', \quad r \in \mathbb{R}, \\ (f \pm g)' &= f' \pm g'. \end{aligned}$$