Wronski-Determinante

Für eine Fundamentalmatrix Γ des homogenen Differentialgleichungssystems $u' = A(t)u$ gilt für die sogenannte Wronski-Determinante $\det \Gamma(t)$

$$(\det \Gamma)' = \operatorname{Spur} A \, (\det \Gamma) \, .$$

Damit ist

$$\det \Gamma(t) = \det \Gamma(t_0) \exp \left(\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s) \, ds \right) > 0 \, ,$$

woraus insbesondere folgt, dass $\Gamma(t)$ für alle $t > t_0$ invertierbar ist, falls $\det \Gamma(t_0) \neq 0$.

Beweis:

$\Gamma' = A\Gamma$, lineare Taylor-Approximation $\quad \Longrightarrow$

$$\Gamma(t+\Delta t) = \Gamma(t) + A(t)\Gamma(t)\Delta t + O((\Delta t)^2)$$

und

$$\frac{d}{dt}\det\Gamma \quad = \quad \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{\det(\Gamma(t) + A(t)\Gamma(t)\Delta t) - \det\Gamma(t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Mit Γ_j den Zeilen von A gilt

$$\text{Zeile } k \text{ von } A\Gamma : \; \sum_j a_{k,j}\Gamma_j$$

entwickle die im Differentialquotienten auftretende Determinante

$$\Gamma + A\Gamma\Delta t = \begin{pmatrix} \Gamma_1 + \Delta t \sum_j a_{1j}\Gamma_j \\ \Gamma_2 + \Delta t \sum_j a_{2j}\Gamma_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

berücksichtige nur Determinanten mit höchstens einem Faktor Δt
streiche Determinanten mit zwei linear abhängigen Zeilen
$\rightsquigarrow$ vereinfachte Entwicklung der Determinante

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \Gamma_1 + \Delta t \sum_j a_{1j}\Gamma_j \\ \Gamma_2 + \Delta t \sum_j a_{2j}\Gamma_j \\ \vdots \end{pmatrix} &= \det\Gamma + \Delta t\, a_{11} \det\Gamma + \Delta t\, a_{22} \det\Gamma + \cdots \\ &= \det\Gamma + \Delta t \operatorname{Spur} A \det\Gamma\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Differentialgleichung für $d = \det\Gamma$:

$$d' = sd, \quad s = \operatorname{Spur} A$$

Integration $\rightsquigarrow$

$$d(t) = d(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t s(\tau)\,d\tau\right)$$

Beispiel:

homogene Differentialgleichung

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} u$$

Spur $A = 3 \implies (\det \Gamma)' = 3(\det \Gamma)$ und

$$\det \Gamma = c \exp(3t), \quad c = \det \Gamma(0)$$

für jede Fundamentalmatrix Γ ($\Gamma' = A\Gamma$)

z.B. $c = 1$ für

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) & (t-1)\exp(2t) \\ 0 & \exp(2t) \end{pmatrix}$$