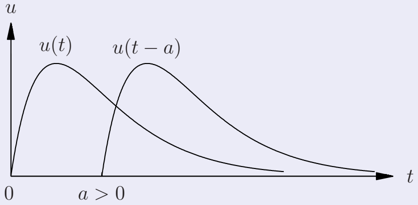
Verschiebung und Skalierung bei Laplace-Transformation

Bezeichnet man, wie in der Abbildung illustriert, mit $u(\cdot - a)$ die um a nach rechts verschobene Funktion, so gilt für die Laplace-Transformation

$$u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s)\,.$$



Umgekehrt ist

$$\exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)\,.$$

Für die Laplace-Transformation einer skalierten Funktion gilt

$$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} a^{-1}U(s/a)\,.$$

Beweis:

(i) Verschiebung:

$$\int_0^\infty u(t-a)\exp(-st)\,dt = \int_{-a}^\infty u(\tau)\exp(-s(\tau+a))\,d\tau$$

$u(t) = 0$ für $t \leq 0$ $\quad\Longrightarrow\quad$ Transformationsregel

(ii) Multiplikation mit einer Exponentialfunktion:

$$\int_0^\infty \exp(at)u(t)\exp(-st)\,ds = \int_0^\infty u(t)\exp(-(s-a)t)\,ds = U(s-a)$$

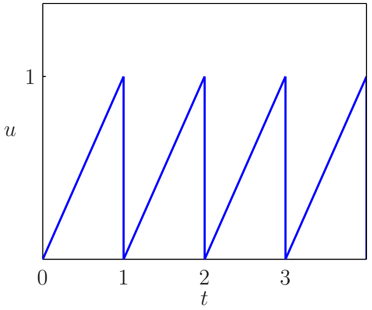
(iii) Skalierung:
Substitution $\tau = at, dt = a^{-1}d\tau$ und $-st = -(s/a)\tau$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Behauptung

Beispiel:

Für $0 \leq t \leq 1$ wird die links abgebildete Funktion durch

$$u_0(t) = \underbrace{t}_{\varphi} - \underbrace{(t-1)_+}_{\psi} - \underbrace{(t-1)_+^0}_{\chi}\,, \quad x_+^j = \begin{cases} x^j & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben, wie rechts in der Abbildung illustriert ist.



Laplace-Transformation nach der Verschiebungsregel:

$$U_0(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{\exp(-s)}{s^2} - \frac{\exp(-s)}{s} = \frac{1 - \exp(-s) - s\exp(-s)}{s^2}$$

Regel für die Laplace-Transformation 1-periodischer Funktionen

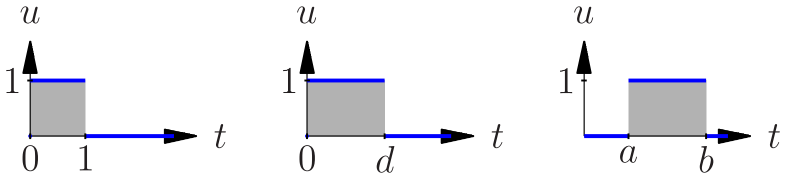
$\rightsquigarrow$ Transformation der Sägezahnfunktion

$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{U_0(s)}{1-\exp(-s)} = \frac{1}{s^2} - \frac{\exp(-s)}{s(1-\exp(-s))} \\ &= \frac{1-(1+s)\exp(-s)}{s^2(1-\exp(-s))} \end{aligned}$$

Beispiel:

Laplace-Transformation des Standardimpulses (links)

$$U(s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-st}\,dt = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}$$



Skalierung $v(t) = u(t/d) \rightsquigarrow$

$$V(s) = d\,\frac{1-\mathrm{e}^{-ds}}{ds} = \frac{1-\mathrm{e}^{-ds}}{s}$$

Verschiebung $w(t) = v(t-a)$ mit $d = b - a$

$\rightsquigarrow$ Laplace-Transformierte der allgemeinen Impulsfunktion (rechts)

$$W(s) = \mathrm{e}^{-as}\,\frac{1 - \mathrm{e}^{-(b-a)s}}{s} = \frac{\exp(-as) - \exp(-bs)}{s}$$

Übereinstimmung mit der direkten Berechnung

$$W(s) = \int_a^b e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^b$$