Variation der Konstanten

Die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$u' = A(t)u + b(t)$$

kann mit Hilfe einer Fundamentalmatrix $\Gamma(t)$ ($\Gamma' = A\Gamma$) ausgedrückt werden.
Für einen beliebigen Vektor c ist

$$u_h(t) = \Gamma(t)c$$

eine Lösung des homogenen Systems.
Variation der Konstanten durch den Ansatz $u(t) = \Gamma(t)c(t)$ führt auf

$$u(t) = \Gamma(t)\left[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Gamma(s)^{-1}b(s)\,ds\right].$$

Beweis:

Differentiation von $u(t)$:

$$u'(t) = \left\{ \Gamma'(t) \left[\Gamma(t_0)^{-1} u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Gamma(s)^{-1} b(s)\, ds \right] + \Gamma(t)\, \Gamma(t)^{-1} b(t) \right\}$$

Γ Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung ($\Gamma' = A\Gamma$) $\quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \{\cdots\} &= A(t)\Gamma(t) \left[\Gamma(t_0)^{-1} u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Gamma(s)^{-1} b(s)\, ds \right] + b(t) \\ &= A(t)u(t) + b(t) \end{aligned}$$

($u = \Gamma[\cdots]$)

Auswerten von u an t_0 $\quad \rightsquigarrow \quad$ Anfangsbedingung

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix des homogenen Systems:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cosh(t^2/2) & \sinh(t^2/2) \\ \sinh(t^2/2) & \cosh(t^2/2) \end{pmatrix},$$

denn

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} t\sinh(t^2/2) & t\cosh(t^2/2) \\ t\cosh(t^2/2) & t\sinh(t^2/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \Gamma$$

$\cosh^2 - \sinh^2 = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(t^2/2) & -\sinh(t^2/2) \\ -\sinh(t^2/2) & \cosh(t^2/2) \end{pmatrix}$$

Lösungsformel $u(t) = \Gamma(t)[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^t \Gamma(s)^{-1}b(s)\,ds]$ und Verwendung der Abkürzungen $C = \cosh$, $S = \sinh$ $\quad \rightsquigarrow$

$$u(t) = \begin{pmatrix} C(t^2/2) & S(t^2/2) \\ S(t^2/2) & C(t^2/2) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} sC(s^2/2) \\ -sS(s^2/2) \end{pmatrix} ds \right.$$

d.h.

$$u(t) = \begin{pmatrix} 2S(t^2/2) + C(t^2/2) \\ S(t^2/2) + 2C(t^2/2) - 1 \end{pmatrix}$$