System von Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Standardform eines Systems von Differentialgleichungen ist

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

mit der Anfangsbedingung $u(t_0) = a$. Dabei ist $u = (u_1, \dots, u_n)^{\mathrm{t}}$ und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

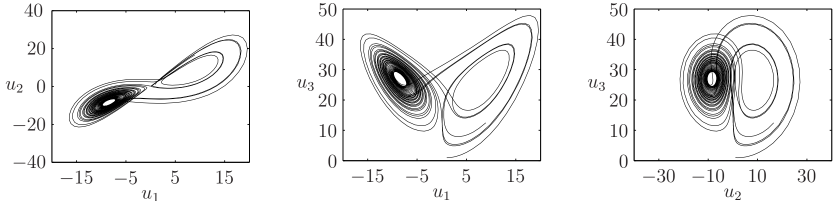
Hängt die Funktion f nicht explizit von t ab, so spricht man von einem autonomen System.

Beispiel:

Lorenz-System

$$
\begin{aligned}
u_1' &= -\alpha u_1 + \alpha u_2 \\
u_2' &= -u_1 u_3 + \beta u_1 - u_2 \\
u_3' &= u_1 u_2 - \gamma u_3
\end{aligned}
$$

geeignete Parameterwahl $\quad \rightsquigarrow \quad$ “Strange Attractor”,
d.h. Konvergenz beschränkter Lösungskurven gegen eine fraktale Menge



verschiedene Perspektiven des Attractors für $\alpha = 10$, $\beta = 28$ und $\gamma = 8/3$

Transformation eines Differentialgleichungssystems auf Standardform

Für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

setzt man

$$u(t) = (y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

und erhält ein äquivalentes System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= g(t, u(t))\,. \end{aligned}$$

Für ein System von Differentialgleichungen höherer Ordnung verfährt man analog.
Durch Einführen einer weiteren zusätzlichen Variablen $u_{n+1}(t) = t$ und der trivialen Differentialgleichung $u'_{n+1} = 1$ ließe sich auch die explizite Abhängigkeit der rechten Seite von t eliminieren, und man erhielte das autonome System

$$(u_1, \ldots, u_{n+1})' = g\big(u_{n+1}, u_1 \circ u_{n+1}, \ldots, u_n \circ u_{n+1}\big)\,.$$

Diese Umformung ist jedoch weniger gebräuchlich.

Beispiel:

Die Differentialgleichung

$$\varphi'' = f(t) - r\varphi' - \sin\varphi$$

beschreibt eine erzwungene Schwingung eines Pendels, wobei $r > 0$ den Reibungskoeffizienten und $f(t)$ die äußere Kraft bezeichnet.

Substitution $(u_1, u_2) = (\varphi, \varphi')$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= f(t) - ru_2 - \sin u_1 \end{aligned}$$

Einführen der weiteren Variable $u_3(t) = t$ und der zusätzlichen trivialen Gleichung

$$u_3' = 1$$

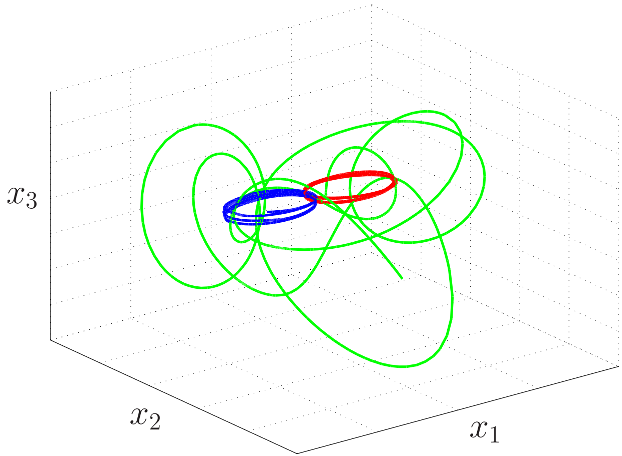
$\rightsquigarrow$ autonomes System

Beispiel:

Drei-Körper Problem:
Differentialgleichungen für die Bahnkurven $t \to P_j(t) \in \mathbb{R}^3$ von Himmelskörpern unter dem Einfluß von Gravitationskräften

$$\begin{aligned}
P_1'' &= \gamma m_2(P_2 - P_1)|P_2 - P_1|^{-3} + \gamma m_3(P_3 - P_1)|P_3 - P_1|^{-3} \\
P_2'' &= \gamma m_1(P_1 - P_2)|P_1 - P_2|^{-3} + \gamma m_3(P_3 - P_2)|P_3 - P_2|^{-3} \\
P_3'' &= \gamma m_1(P_1 - P_3)|P_1 - P_3|^{-3} + \gamma m_2(P_2 - P_3)|P_2 - P_3|^{-3}
\end{aligned}$$

mit $\gamma = 3.993\mathrm{N}\ \mathrm{km}^2\mathrm{kg}^{-1}$ der Gravitationskonstante und m_k den Massen der Körper



x_3
x_2
x_1

Transformation auf Standardform durch Einführen von zusätzlichen Variablen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = P_1\,, \quad \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = P_2\,, \quad \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \end{pmatrix} = P_3$$

$$\begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = P_1'\,, \quad \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = P_2'\,, \quad \begin{pmatrix} u_{16} \\ u_{17} \\ u_{18} \end{pmatrix} = P_3'$$

$\rightsquigarrow$ System von 18 Differentialgleichungen erster Ordnung
zusätzliche Differentialgleichungen für die Hilfsvariablen

$$u'_{6(j-1)+k} = u_{6(j-1)+k+3}\,, \quad j,k = 1,2,3$$