Kritische Punkte eines autonomen Differentialgleichungssystems

Für eine autonome Differentialgleichung

$$u' = f(u), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}\,,$$

bezeichnet man eine Nullstelle u_* von f als kritischen Punkt.
Sie entspricht einer konstanten Lösung ($u(t) = u_*$).

In einer Umgebung von u_* hat die Linearisierung die Form eines homogenen linearen Systems

$$v' = f'(u_*)v$$

mit $v(t) = u(t) - u_*$ und f' der Jacobi-Matrix von f.

Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungssysteme

Ein kritischer Punkt u_* eines autonomen Differentialgleichungssystems

$$u' = f(u)$$

$(f(u_*) = 0)$ ist stabil, wenn alle Eigenwerte von $A = f'(u_*)$ negativen Realteil haben.
Es gibt dann eine Umgebung D von u_*, so dass

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = u_*$$

für alle Anfangswerte $u(0) \in D$.
Die Typeneinteilung (stabiler Knoten oder Spirale) erfolgt analog zu der des approximierenden linearen Differentialgleichungssystems

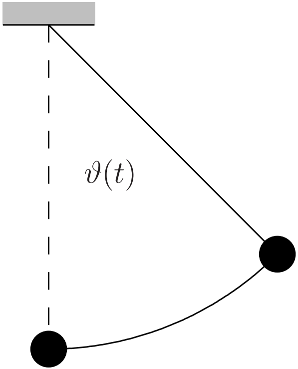
$$v' = Av, \quad v(t) = u(t) - u_*\,.$$

Beispiel:

Die Auslenkung eines gedämpften Pendels wird durch die Differentialgleichung

$$\vartheta'' = -\sin\vartheta - r\vartheta'$$

mit einem Reibungskoeffizienten $r > 0$ beschrieben.



Standardform mit $u = (\vartheta, \vartheta')^{\mathrm{t}}$

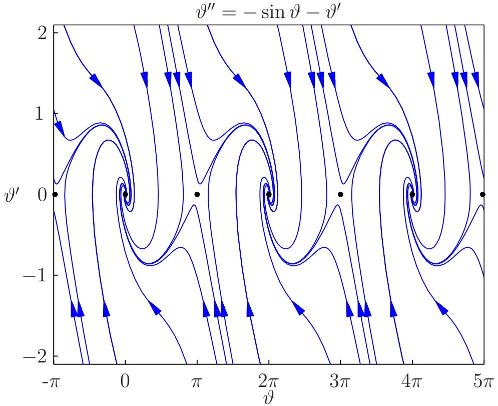
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\sin u_1 - r u_2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ kritische Punkte $(j\pi, 0)^{\mathrm{t}}$, $j \in \mathbb{Z}$
$(2k\pi, 0)^{\mathrm{t}}$: tiefste Position des Pendels (stabil)
$((2k+1)\pi, 0)^{\mathrm{t}}$:
höchste Position des Pendels (instabil)
rechnerische Bestätigung:

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos u_1 & -r \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Spur}\, f' = -r < 0, \quad \det f' = \cos u_1$$

$u_1 = 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \det f' = 1 > 0$, d.h. Stabilität
$u_1 = (2k+1)\pi \quad \Longrightarrow \quad \det f' = -1 < 0$, d.h. Eigenwerte der Jacobi-Matrix mit verschiedenem Vorzeichen (instabiler Sattel)



Typ der stabilen kritischen Punkte

Spirale: $1 = \det f' > \left(\frac{\mathrm{Spur}\, f'}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad r < 2$

Knoten: $r \geq 2$

Beispiel:

Das Wachstum zweier konkurrierender Spezies kann durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u' &= u(1 - \alpha u - \beta v)\,, \\ v' &= v(1 - \gamma u - \varrho v) \end{aligned}$$

mit Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \varrho$ und $\alpha, \varrho > 0$ beschrieben werden.

Der kritische Punkt (u_*, v_*) mit $u_*, v_* > 0$ erfüllt

$$\begin{aligned} 1 - \alpha u_* - \beta v_* &= 0 \\ 1 - \gamma u_* - \varrho v_* &= 0 \end{aligned}$$

Stabilitätsanalyse mit Hilfe der Jacobi-Matrix

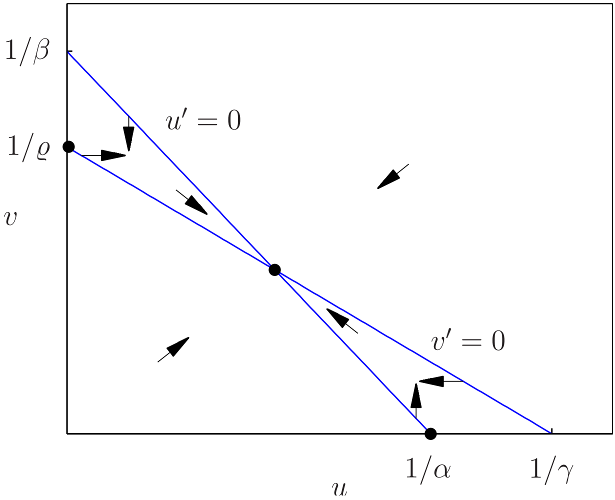
$$
\begin{aligned}
f'(u_*, v_*) &= \left. \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha u - \beta v & -\beta u \\ -\gamma v & 1 - \gamma u - 2\varrho v \end{pmatrix} \right|_{(u_*, v_*)} \\
&= \begin{pmatrix} -\alpha u_* & -\beta u_* \\ -\gamma v_* & -\varrho v_* \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Spur und Determinante

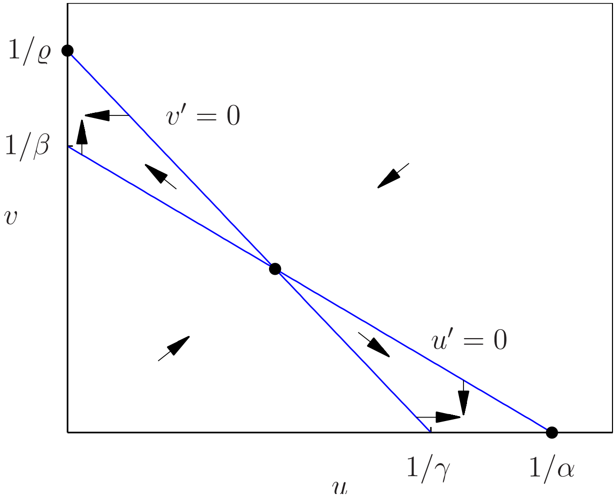
$$
\begin{aligned}
\operatorname{Spur} f'(u_*, v_*) &= -\alpha u_* - \varrho v_* < 0 \\
\det f'(u_*, v_*) &= (\alpha\varrho - \beta\gamma) u_*
\end{aligned}
$$

(u_*, v_*) stabil genau dann wenn $\alpha\varrho - \beta\gamma > 0$

(i) Gleiche Ressourcen ($\beta, \gamma > 0$):

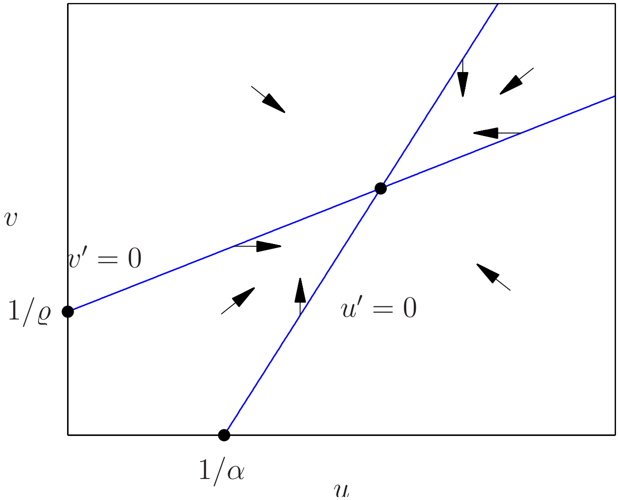


stabiler kritischer Punkt für $\alpha > \gamma$ und $\beta < \varrho$



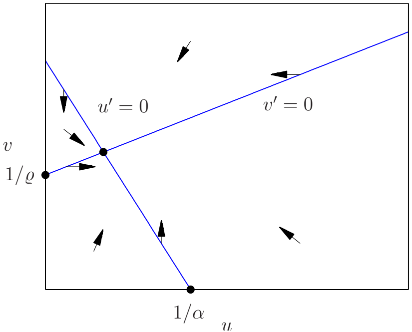
instabiler kritischer Punkt für $\alpha < \gamma$ und $\beta > \varrho$

(iii) Gegenseitige Hilfe ($\beta, \gamma < 0$)



stabiler kritischer Punkt für $\alpha\varrho > \beta\gamma$

(iv) Raubtier-Beute ($\beta\gamma < 0$):



$\beta > 0, \gamma < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ *v* lebt von *u*
stabiler kritischer Punkt