Stabilität linearer Differentialgleichungssysteme

Ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$u' = Au, \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}\,,$$

ist

- stabil, wenn
  $$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0$$
  für alle Anfangswerte $u(0)$;
- neutral stabil, wenn jede Lösung $u(t)$ für alle $t > 0$ beschränkt bleibt und es Startwerte $u(0)$ gibt, für die $u(t)$ nicht gegen 0 konvergiert;
- instabil, wenn
  $$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty$$
  für einen Anfangswert $u(0)$.

Stabilität lässt sich mit Hilfe der Eigenwerte λ von A charakterisieren. Notwendig und hinreichend ist, dass $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle Eigenwerte. Existiert hingegen ein Eigenwert mit $\operatorname{Re} \lambda > 0$, so ist das System instabil.

Beispiel:

zweidimensionales System

$$u' = Au, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Eigenwerte $\lambda_\pm = \alpha \pm \mathrm{i}$

$\operatorname{Re} \lambda_\pm = \alpha \quad \Longrightarrow$

- stabil für $\alpha < 0$
- instabil für $\alpha > 0$

$\alpha = 0$:

$$u_1' = u_2, \quad u_2' = -u_1$$

$\Longrightarrow$

$$u_1(t) = a \cos t + b \sin t, \quad u_2(t) = -a \sin t + b \cos t$$

beschränkte Lösungen $\quad \Longrightarrow \quad$ neutrale Stabilität

Klassifizierung reeller zweidimensionaler linearer Differentialgleichungssysteme

Das qualitative Verhalten der Lösungen des Differentialgleichungssystems

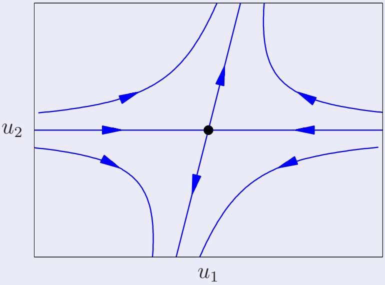
$$u' = Au, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}},$$

mit A einer reellen 2×2-Matrix lässt sich anhand der Jordan-Form

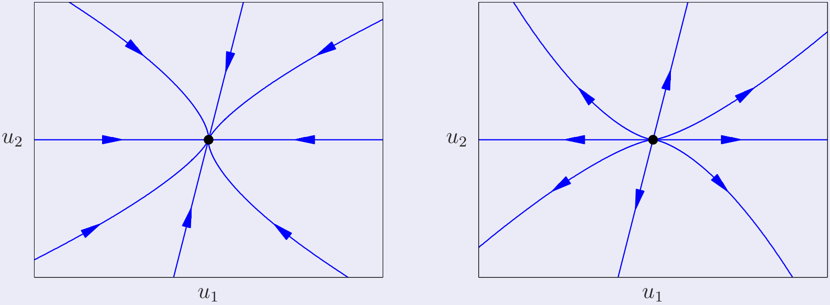
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \varrho \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ, \qquad s \in \{0, 1\},$$

von A klassifizieren $(u = Qv \;\Rightarrow\; v' = Jv)$.
Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils den Verlauf typischer Lösungskurven.

- Instabiler Sattel: $\lambda\varrho < 0$

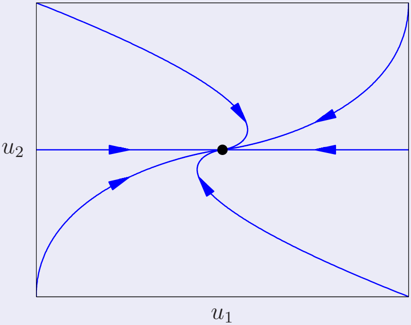


- Knoten: $\lambda\varrho > 0$, $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$

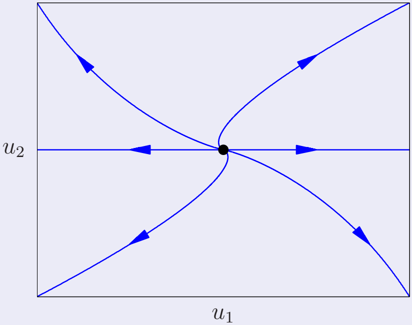


stabil, $\lambda, \varrho < 0$ instabil, $\lambda, \varrho > 0$

Existiert keine Basis aus Eigenvektoren von A ($s = 1$), so spricht man von einem entarteten Knoten.

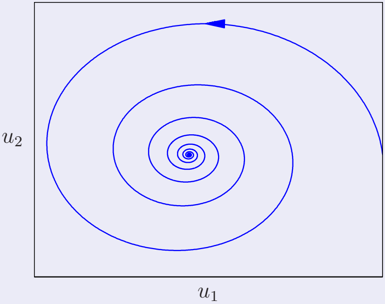


stabil, $\lambda < 0$

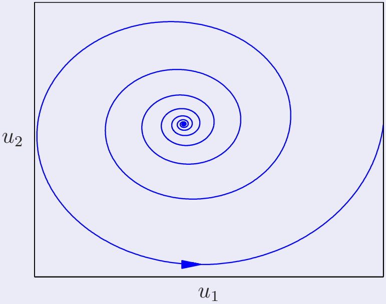


instabil, $\lambda > 0$

- Spirale: $\lambda = r + \mathrm{i}\omega = \bar{\varrho}$, $r\omega \neq 0$

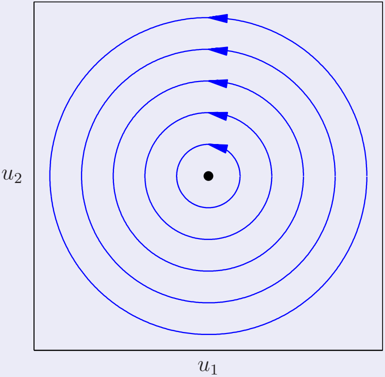


stabil, $r < 0$

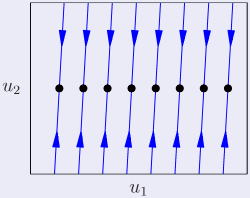


instabil, $r > 0$

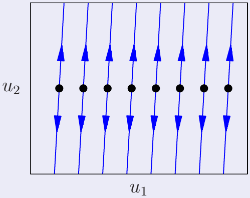
- Zentrum: $\lambda = \mathrm{i}\omega = \bar{\varrho}$, $\omega \neq 0$



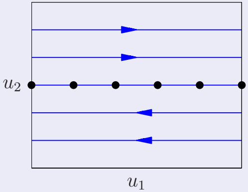
Zusätzlich gibt es noch degenerierte Fälle, bei denen ein Eigenwert null ist.



$\lambda = 0,\ \varrho < 0$



$\lambda = 0,\ \varrho > 0$



$\lambda = 0,\ \varrho = 0,\ s = 1$

In jedem dieser Fälle hat das Differentialgleichungssystem Ruhepunkte entlang der gesamten v_1-Achse.

Beweis:

Differentialgleichungssystem in Jordan-Form

$$v' = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}}_{J} v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} v_1' & = & \lambda v_1 + s v_2 \\ v_2' & = & \varrho v_2 \end{array}$$

(A) $s = 0$:
allgemeine Lösung

$$v_1 = \alpha e^{\lambda t},\ v_2 = \beta e^{\varrho t} \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(B) $s = 1$ ($\implies \lambda = \varrho$):
allgemeine Lösung

$$v_1 = (\alpha + \beta t) e^{\lambda t},\ v_2 = \beta e^{\lambda t} \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Verschiedene Fälle

(i) $\lambda\varrho < 0$:

$\Longrightarrow \quad \lambda \neq \varrho$, beide Eigenwerte reell (Produkt komplex konjugierter Eigenwerte positiv), und $s = 0$

ein Eigenwert positiv

$\Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} |v(t)| = \infty$

$\Longrightarrow \quad$ instabil

(ii) $\lambda\varrho > 0$, λ, ϱ reell:

entweder beide Eigenwerte positiv oder negativ;

entsprechend gilt $\lim_{t\to\infty} |v(t)| = \infty$ oder 0

$\Longrightarrow \quad$ instabil oder stabil

Die Aussage gilt auch im degenerierten Fall $\lambda = \varrho$, $s = 1$ aufgrund der Form (B) der allgemeinen Lösung.

$$\lim_{t\to 0} te^{\lambda t} = 0 \quad \text{für } \lambda < 0$$

(iii) $\lambda = r + \mathrm{i}\omega = \overline{\varrho}$, $r\omega \neq 0$:
allgemeine Lösung

$$v(t) = \mathrm{e}^{rt} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{pmatrix}}_{p(t)}$$

$p(t)$ beschränkt $\implies$ Vorzeichen von r entscheidet Stabilitätstyp
reelle Lösung spiralförmig

$$u(t) = \mathrm{e}^{rt}(a\,\mathrm{Re}(\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) + b\,\mathrm{Im}(\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}))$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und ξ dem (komplexen) Eigenvektor zu $\lambda = r + \mathrm{i}\omega$

(iv) $\lambda = \mathrm{i}\omega = \overline{\varrho} \neq 0$:
analog zu (iii), Lösungen beschränkt und periodisch (Ellipsen)

(v-a) $\lambda = 0$, $\varrho \neq 0$:
allgemeine Lösung ($s = 0$)

$$v(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{\varrho t} \end{pmatrix}$$

$\varrho < 0$: $|v(t)|$ für $t \to \infty$ beschränkt $\implies$ neutral stabil

$\varrho > 0$: $|v(t)|$ für $t \to \infty$ unbeschränkt $\implies$ instabil

(v-b) $\lambda = 0 = \varrho$, $s = 1$:
allgemeine Lösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \beta \end{pmatrix}$$

instabil

Stabilitätsdiagramm

Für ein zweidimensionales Differentialgleichungssystem

$$u' = Au, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}},$$

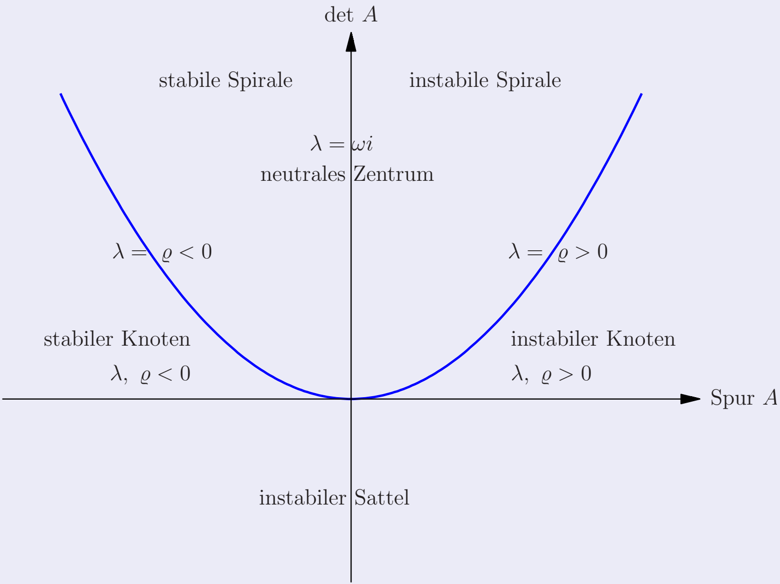
lässt sich Stabilität mit Hilfe der Determinante und Spur der Matrix A charakterisieren. Notwendig und hinreichend für Stabilität ist

$$\det A > 0,\ \operatorname{Spur} A < 0\,.$$

Die Parabel

$$\det A = \left(\frac{\operatorname{Spur} A}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \lambda = \varrho$$

trennt die qualitativ verschiedenen Fälle Spirale und Knoten.
Bei dem Grenzfall $\lambda = \varrho$ handelt es sich um einen (gegebenenfalls entarteten) Knoten.


det A
stabile Spirale
instabile Spirale
$\lambda = \omega i$
neutrales Zentrum
$\lambda = \varrho < 0$
$\lambda = \varrho > 0$
stabiler Knoten
$\lambda,\ \varrho < 0$
instabiler Knoten
$\lambda,\ \varrho > 0$
Spur A
instabiler Sattel

Beweis:

λ, ϱ Eigenwerte von A $\quad\Longrightarrow$

$$\det A = \lambda\varrho\ , \quad \operatorname{Spur} A = \lambda + \varrho$$

- $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$:
  Stabilität, d.h. $\lambda, \varrho < 0 \quad \Leftrightarrow$

  $$\det A > 0 \quad \wedge \quad \operatorname{Spur} A < 0$$

- $\lambda = r + \omega\mathrm{i}$, $\varrho = r - \omega\mathrm{i}$:

  $$\det A = r^2 + \omega^2 > 0, \quad \operatorname{Spur} A = 2r$$

$\rightsquigarrow$ gleiches Kriterium für Stabilität

Übergang von komplexen zu reellen Eigenwerten $\quad\Leftrightarrow\quad \omega \to 0$, d.h.

$$\lambda = \varrho \quad \Leftrightarrow \quad \det A = \left(\frac{\operatorname{Spur} A}{2}\right)^2$$

(abgebildete Parabel $\widehat{=}$ Knoten mit doppeltem Eigenwert)

Beispiel:

Stabilität des Differentialgleichungssystems

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}}_{A} u$$

in Abhängigkeit von dem reellen Parameter α

Charakterisierung mit Hilfe von

$$\det A = 2, \quad \operatorname{Spur} A = \alpha$$

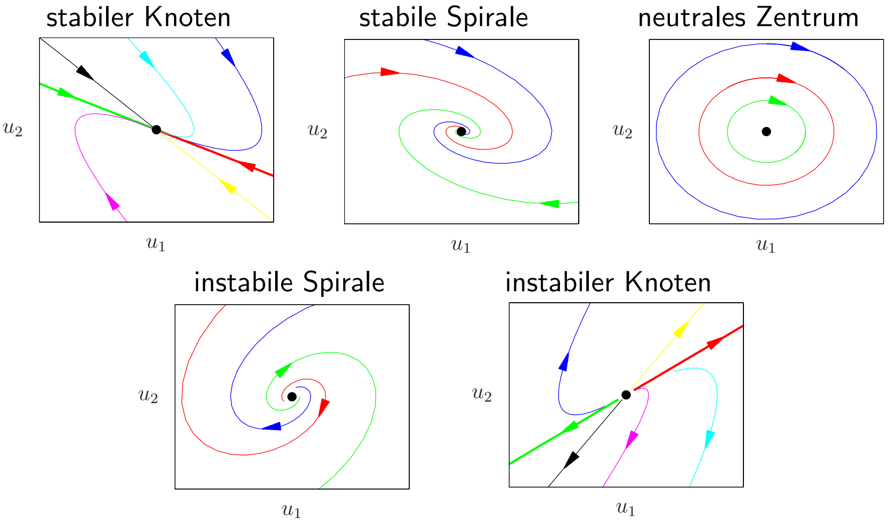
(i) $\alpha < 0$:
stabil

- Knoten:
$$2 = \det A \leq (\operatorname{Spur} A/2)^2 = (\alpha/2)^2\,,$$
d.h. $\alpha \leq -2\sqrt{2}$
- Spirale:
$$\det A > (\operatorname{Spur} A/2)^2\,,$$
d.h. $-2\sqrt{2} < \alpha < 0$

(ii) $\alpha = 0$:
neutrales Zentrum, Eigenwerte $\pm\mathrm{i}\sqrt{2}$

(iii) $\alpha > 0$:
instabil

- Spirale:
$$0 < \alpha < 2\sqrt{2}$$
- Knoten:
$$2\sqrt{2} \leq \alpha$$



Eigenlöungen $u = ve^{\lambda t}$ zu reellen Eigenwerten fett